Программа по математике для проведения аттестации при восстановлении (переводе) на факультет фундаментальной физико-химической инженерии МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

При восстановлении (переводе) на 2-й курс экзаменационные билеты формируются из материалов разделов «Математический анализ ч.1, ч.2», «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра».

При восстановлении (переводе) на 3-й курс и выше экзаменационные билеты формируются из материалов разделов «Математический анализ ч. 1-3», «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра».

Математический анализ

Часть 1

Основные логические и теоретико-множественные понятия и обозначения, отображения множеств.

Доказательство по индукции. Неравенство Бернулли. Модуль, знак, максимум, минимум.

Промежутки и окрестности на действительной прямой $\mathbb{R}$ и расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Верхние и нижние грани числовых множеств, супремум и инфимум. Принцип полноты Вейерштрасса.

Числовые функции на $\mathbb{R}$. Непрерывность функции в точке. Предел функции.

Бесконечно малые функции, их сравнение (~, O и o). Бесконечно большие функции. Асимптотическое поведение, асимптоты.

Предельный переход в неравенстве, теорема о зажатой переменной. Первый замечательный предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Числовые последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Частичные пределы последовательности. Верхний и нижний пределы.

Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Показательная функция. Логарифмическая функция. Общая степенная функция. Связанные с ними замечательные пределы.

Односторонние пределы и односторонняя непрерывность функции. Точки разрыва функций.

Глобальные свойства непрерывных функций (на отрезке): ограниченность, достижение супремума и инфимума множества своих значений, теорема о промежуточных значениях.

Производная функции в точке. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала функции. Уравнение касательной.

Дифференцирование композиции функций, обратной функции, параметрически заданной функции. Производные высших порядков.

Локальный экстремум. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума. Дифференциальные теоремы о среднем: теоремы Лагранжа, Ролля, Коши. Условия монотонности и строгой монотонности функции.

Выпуклость дифференцируемой функции, точка перегиба. Достаточное условие выпуклости.

Правило Лопиталя для неопределенностей вида 0/0 и вида ∞/∞. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.

Числовой ряд, его члены, частичные суммы, остатки. Сходимость ряда, его сумма. Необходимое условие сходимости ряда. Линейность суммы ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Примеры сходящихся и расходящихся рядов: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}, \sum_{k=0}^{\infty} q^k \ (q \in \mathbb{R}), \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Порядок сравнения. Признак Даламбера и Коши. Сходимость рядов $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при различных $p \in \mathbb{R}$.

Абсолютная сходимость и условная сходимость ряда. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле.

Часть 2

Определенный интеграл Римана, его геометрический смысл и свойства. Критерий Дарбу. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

Формула Ньютона-Лейбница. Интеграл с переменным верхним пределом. Интегрирование по частям и замена переменных.

Ряд Тейлора. Интегральный признак сходимости ряда.

Несобственный интеграл: определение, свойства, признаки сходимости.

Интегралы Дирихле и Эйлера-Пуассона. Г- и В- функции.

Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Неравенства Коши-Буняковского-Шварца, треугольника, Гельдера и Минковского.

Метрические пространства. Открытые и замкнутые множества. Компактные множества. Непрерывные отображения.

Непрерывность и предел функций нескольких переменных ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Дифференцируемость функций нескольких переменных, необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Частные производные, дифференциал, градиент, производные по направлениям.

Дифференцирование сложных функций. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Теорема о неявной функции; нахождение ее частных производных и дифференциалов.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточные условия экстремума.

Условный экстремум. Множители и функция Лагранжа. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Дифференцируемые отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Матрица Якоби. Теорема о неявном отображении.

Часть 3

Кратные интегралы. Двойной интеграл и его основные свойства. Вычисление двойных интегралов: повторное интегрирование и замена переменных. Тройные и n-кратные интегралы. Их свойства и способы вычисления. Геометрические приложения.

Криволинейные и поверхностные интегралы. Длина дуги кривой. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Понятие поверхности. Внутренние координаты на поверхности. Ориентация поверхности. Дифференциальные формы. Дивергенция. Ротор. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формулы Грина, Остроградского, Стокса.

Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов. Теоремы об интегрировании, дифференцировании и непрерывности функциональных рядов.

Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Интегралы, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Теоремы об интегрировании, дифференцировании и непрерывности по параметру несобственных интегралов, зависящих от параметра. Эйлеровы интегралы.

Ряды Фурье. Евклидовы пространства. Понятие гильбертова пространства. Ряды Фурье по ортогональной системе элементов евклидова пространства. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полные и замкнутые системы. Полнота и замкнутость тригонометрической системы. Разложение функций в ряд Фурье по тригонометрической системе функций. Сходимость и равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Свойства тригонометрических рядов Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Интеграл Фурье.

Преобразования Фурье. Простейшие свойства преобразования Фурье. Операция свертки и преобразование Фурье. Формула обращения.

Литература:

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: В 3-х тт. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление (существенно перераб. изд.). – М.: МЦНМО, 2017. – 412 с.
2. Власов В.В. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу и дифференциальным уравнениям (2-е изд.) – М.: БИНОМ, 2010. – 376 с.
3. Гаврилов В.И., Макаров Ю.Н., Чирский В.Г. Математический анализ: учебное пособие. – М.: Академия, 2013. – 336 с.
4. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, 2005.

Аналитическая геометрия

Матрицы и системы линейных алгебраических уравнений. Действия с матрицами, перестановки, свойства перестановок, знак перестановки. Определитель квадратной матрицы, его свойства. Матричная запись системы линейных уравнений. Элементарные операции со строками матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Метод Крамера решения системы линейных уравнений. Понятие фундаментальной системы решений. Запись общего решения системы с помощью фундаментальной системы решений.

Линейные объекты в аналитической геометрии на плоскости. Векторы на плоскости и в пространстве. Отношение эквивалентности. Свободные векторы как классы эквивалентности. Операции с векторами. Линейная зависимость векторов и ее свойства. Аффинная система координат. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов и его свойства. Ориентированная площадь и ориентированный объем, их свойства. Смешанное и векторное произведения. Прямая на плоскости. Положительная и отрицательная полуплоскости. Пучок прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между прямыми.

Линейные объекты в аналитической геометрии в пространстве. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей. Пучок и связка плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Способы задания прямой в пространстве. Расстояние от точки до прямой, расстояние между скрещивающимися прямыми. Замены координат. Ортогональная матрица. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

Квадратичные объекты в аналитической геометрии на плоскости. Определение эллипса, вывод канонического уравнения эллипса, свойства эллипса. Определение гиперболы, вывод канонического уравнения гиперболы, свойства гиперболы. Определение параболы, вывод канонического уравнения параболы, свойства параболы. Фокальные свойства эллипса, гиперболы, параболы. Их полярные уравнения. Общая теория кривых второго порядка. Три канонических типа кривых. Девять канонических видов кривых второго порядка. Ортогональные инварианты и семиинвариант. Определение типа кривой по инвариантам. Асимптотические направления, диаметры и центр кривой второго порядка.

Квадратичные объекты в аналитической геометрии в пространстве. Поверхности второго порядка. Пять основных типов поверхностей. Теорема о 17 канонических видах поверхностей второго порядка. Исследование геометрической формы основных видов поверхностей. Прямолинейные образующие.

Литература:

1. Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: НАУКА, 1980.
2. О.Н. Цубербиллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Изд-во “Лань”, 2003.
3. П.С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. Ю.М. Смирнов. Аналитическая геометрия. М .: УРСС, 2004.
5. А.П. Веселов, Е.В. Троицкий. Лекции по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2004.

Линейная алгебра

Определение линейного пространства, простейшие следствия из аксиом. Примеры линейных пространств.

Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов в линейном пространстве. Основная лемма о линейной зависимости. Следствия. Примеры линейно зависимых и линейно независимых систем векторов. Понятие полной системы и базиса. Размерность конечномерного линейного пространства. Теорема о базисе. Примеры базисов. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов до базиса.

Координаты вектора в базисе, единственность координат. Матрица перехода между двумя базисами линейного пространства. Связь координат вектора в различных базисах

Понятие подпространства линейного пространства, примеры подпространств. Размерность подпространства. Теоремы о пересечении и объединении подпространств. Линейная оболочка и её свойства. Сумма подпространств. Формула для размерности суммы подпространств. Прямая сумма подпространств, примеры. Теорема о прямой сумме.

Линейные отображения. Примеры, задание линейного отображения образами базисных векторов. Ядро и образ линейного отображения, связь их размерностей с размерностью пространства. Мономорфизм, эпиморфизм и изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Теорема об изоморфизме для пространств одинаковой размерности.

Пространство линейных функционалов как сопряжённое линейное пространство. Сопряжённый базис и размерность сопряженного пространства. Второе сопряжённое пространство. Естественный изоморфизм между линейным пространством и его вторым сопряжённым.

Линейный оператор, определение и примеры. Матрица линейного оператора в базисе, вычисление с её помощью координат образа вектора. Невырожденный оператор и невырожденность его матрицы. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису. Подобные матрицы. Действия с линейными операторами.

Инвариантные подпространства. Примеры инвариантных подпространств. Строение матрицы оператора с инвариантным подпространством в специальном базисе. Приводимый оператор, строение его матрицы в специальном базисе. Понятие прямой суммы операторов.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Примеры. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Инвариантность собственного подпространства. Критерий диаганализируемости матрицы линейного оператора.

Характеристический многочлен оператора, отыскание собственных значений оператора как корней его характеристического многочлена. Алгебраическая и геометрическая кратности корня. Критерий диаганализируемости в терминах корней характеристического многочлена.

Нильпотентный оператор, его свойства. Наличие одномерного или двумерного инвариантного подпространства у всякого оператора в вещественном пространстве. Пример нильпотентного оператора. Понятие Жордановой нормальной формы и Жорданова базиса. Теорема о Жордановой нормальной форме (без доказательства). Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства).

Билинейные формы. Примеры билинейных форм. Матрица билинейной формы в базисе, закон её преобразования при переходе к новому базису. Квадратичная форма и её матрица в базисе. Связь квадратичных и билинейных форм (Полярная билинейная форма). Связь матриц квадратичной формы в различных базисах.

Приведение матрицы квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид квадратичной формы. Индексы инерции, закон инерции. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определённости. Определитель Грамма, её свойства. Неравенство Коши-Буняковского.

Эвклидовы и нормированные пространства. Определение и примеры. Длины векторов и углы между ними. Ортогональные и ортонормированные системы векторов, их свойства. Ортогональные (ортонормированные) базисы. Ортогональные матрицы, ортогональность матрицы перехода между ортонормированными базисами. Ортогональное дополнение к множеству в Эвклидовом пространстве. Общий вид линейного функционала в Эвклидовом пространстве.

Линейные отображения и изоморфизмы Эвклидовых пространств. Теоремы об изоморфизме и об изоморфности. Сопряжённый оператор и его свойства. Самосопряжённый оператор, его свойства, строение матрицы самосопряжённого оператора в специальном базисе.

Изометрический оператор, теорема о его свойствах. Теоремы о свойствах инвариантных подпространств, собственных значениях и каноническом виде матрицы изометрического оператора. Неотрицательный оператор и корень из него. Теорема о представлении оператора в Эвклидовом пространстве в виде композиции неотрицательного и изометрического операторов.

Квадратичные формы в Эвклидовом пространстве. Приведение квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием. Теорема об одновременном приведении пары форм, одна из которых положительно определена.

Литература:

1. И.В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Изд-во “Лань”, 2010.
2. В.В. Федорчук. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.