Программа курса дифференциальных уравнений ФФФХИ МГУ им. М.В. Ломоносова

Весна 2012 г., лектор Н.Н. Шамаров

(количество пар академических часов указывается с учётом времени практических занятий)

1. Определения понятия обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) и его решения. Метод изоклин графического построения грубо приближённых решений одномерных ОДУ; примеры. Метод нахождения дифференциальных уравнений семейств кривых; примеры. Метод Ньютона (разложения в степенной ряд) для нахождения решений линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Пример y'(x)=ay(x) (a **є** **R**, y: **R** → **R**). (2 пары)

2. ОДУ первого порядка (I): с разделяющимися переменными, однородные нелинейные, однородные линейные; методы их решения, примеры. (3 пары)

3. Методы решения ОДУ первого порядка (II): «вариации произвольных постоянных» для линейных неоднородных ОДУ, сведе'ния к линейным для уравнений типа Бернулли и для уравнений типа Риккати с подбирающимся частным решением; примеры. (2 пары)

4. Определение и методы решения ОДУ ``в полных первых дифференциалах'': введение под знак дифференциала и криволинейное интегрирование II рода; примеры. Определение ОДУ в первых дифференциалах. Метод интегрирующего множителя; примеры. (3 пары)

5. ``Метод введения параметра'' для уравнений первого порядка, не разрешённых относительно производной. Понятие и метод поиска особых решений; пример. Уравнения Лагранжа и Клеро; примеры. Методы понижения порядка в ОДУ: введение новой искомой функции, введение параметра; примеры. (4 пары)

6. Нелинейные системы ОДУ 1-го порядка в дифференциалах. Методы: исключения неизвестных, выделение интегрируемых комбинаций. (2 пары)

7. Теоремы о существовании и о единственности решения нормальной системы ОДУ первого порядка $\vec{Y}'(x) = \vec{F}(x, \vec{Y}(x))$ ($\vec{Y}$: *(a,b)* → $\mathbf{R}^n$) (1) (без доказательства); пример неединственности. Определения первых интегралов автономных $\vec{Y}'(x) = \vec{F}(\vec{Y}(x))$ (1a) и неавтономных (1) нормальных систем и для ОДУ в полных дифференциалах; вывод уравнений для первых интегралов автономных и неавтономных нормальных систем. Примеры. Определение независимости системы первых интегралов. Метод получения решений системы (1) из системы n независимых первых интегралов. (3 пары)

8. Определение линейных и квазилинейных уравнений в частных производных. Уравнения характеристик для линейных и для квазилинейных уравнений.
Метод получения решений линейных и квазилинейных уравнений. Примеры. (3 пары)

9. Метод нахождения общего решения линейного однородного, произвольного натурального порядка, ОДУ $a_0\, y^{(n)}(x) + a_1\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}\, y'(x) + a_n\, y(x) = 0$ с постоянными коэффициентами. Метод

нахождения частных решений линейных ОДУ
$a_0\, y^{(n)}(x) + a_1\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = b(x)$ с неоднородностью $b(x)$ вида квазиполинома. Примеры. (2 пары)

10. Теорема существования и единственности решений начальных задач для линейных систем $\vec{Y}'(x) = A(x)\vec{Y}(x) + \vec{B}(x)$ (л) произвольного натурального порядка n. Линейность множества решений однородных линейных систем $\vec{Y}'(x) = A(x)\vec{Y}(x)$ (л0), его размерность, линейность разрешающего отображения, фундаментальная система решений (ФСР). Описание множеств решений неоднородных линейных систем (л) через множества решений однородных систем (л0). Примеры. (3 пары)

11. Вывод уравнения для определителя Вронского упорядоченной системы n решений уравнения (л0). Примеры. (2 пары)

12. Теорема существования и единственности для линейных уравнений вида
$$a_0(x)\, y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, y'(x) + a_n(x)\, y(x) = b(x). \qquad (у)$$
Линейность множества решений однородных уравнений вида
$$a_0(x)\, y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, y'(x) + a_n(x)\, y(x) = 0, \qquad (у0)$$
его размерность, ФСР. Описание множеств решений неоднородных линейных уравнений вида (у) через множества решений однородных уравнений (у0). Вывод уравнения для определителя Вронского упорядоченной системы n решений уравнения (у0), формула Остроградского--Лиувилля. Примеры. (3 пары)

13. Метод нахождения второго решения ФСР уравнения (у0) при n=2, если задано одно из них. Постановка и метод построения функции Грина для краевой задачи с таким уравнением. Вид общего решения краевой задачи для (у) при n=2 с произвольной правой частью - с помощью функции Грина. Примеры. (3 пары).

14. Фазовые портреты решений системы $\vec{Y}'(t) = A\,\vec{Y}(t)$ (2) с постоянной вещественных матрицей A (I). Случаи с различными собственными числами. Фазовые портреты решений системы $\vec{Y}'(t) = A\,\vec{Y}(t)$ (2) с постоянной вещественных матрицей A (II). Случаи с совпавшими собственными числами (жордановы клетки размера 1 и 2). (2 пары)

15. Свойства простой и экспоненциальной устойчивости линейной системы $\vec{Y}'(t) = A\,\vec{Y}(t)$ (2), достаточные условия для наличия и для отсутствия этих свойств (без доказательств); примеры. Метод построения фазовых портретов автономных систем $\vec{Y}'(t) = \vec{F}(\vec{Y}(t))$ (1а) в окрестностях их особых точек; примеры. (3 пары)

16. Непрерывность и дифференцирование решения начальных задач для нормальной системы вида $\vec{Y}'(x) = \vec{F}(x, \vec{Y}(x), \mu)$, $\vec{Y}(0) = g(\mu)$ (1п) по параметру и по начальным условиям (без доказательства); примеры. (2 пары)

Итого 86 часов, с учётом двух контрольных занятий (по одной паре) --- 90 аудиторных часов.
По 3 пары в неделю --- 15 недель.