

Лабораторная работа № 3

Оборотный маятник

3.1 Измерение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

Лабораторная установка, используемая в данной работе, представляет собой физический маятник, закрепленный на штативе.

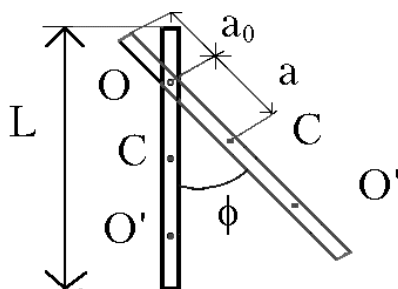


Рис. 3.1: Физический маятник

В качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длины L , не содержащий дополнительных грузов. На стержне массой m закреплена опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние a от точки опоры маятника (оси вращения) O до центра масс C (рис. 3.1). Физическим маятником называется любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может совершать свободные колебания вокруг неподвижной точки. Наиболее просто описывается плоское движение маятника вокруг фиксированной оси. В том случае, если маятник совершает несколько десятков колебаний без заметного затухания, моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь, и уравнение движения маятника записывается в виде:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{M}{J}, \quad (3.1)$$

где J - момент инерции маятника относительно оси вращения, ϕ - угол отклонения маятника от положения равновесия, $d^2\phi/dt^2$ - угловое ускорение; t - время, M - момент всех сил, действующих на маятник. Если пренебречь массой опорной призмы, по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника в этом случае равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс (параллельно оси вращения) и ma^2 :

$$J = \frac{mL^2}{12} + ma^2 . \quad (3.2)$$

Момент силы тяжести, действующей на маятник:

$$M = -mga \sin \phi . \quad (3.3)$$

Подставляя выражение для M и J в (3.1), получим уравнение движения маятника в виде:

$$\ddot{\phi} + \frac{ga}{a^2 + L^2/12} \sin \phi = 0 . \quad (3.4)$$

При малых углах отклонения $\sin \phi \approx \phi$ (ϕ - в радианах), так что (3.4) преобразуется к виду:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 , \quad (3.5)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + L^2/12} . \quad (3.6)$$

Решением этого уравнения является функция

$$\phi(t) = A \sin(\omega t + \alpha) . \quad (3.7)$$

Амплитуда колебаний A и фаза α зависят от того, как возбуждаются колебания маятника, т.е. начальных условий задачи. Например, если мы отклоним маятник от положения равновесия на угол ϕ_0 , а затем отпустим его, то в начальный момент

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = 0 . \quad (3.8)$$

Тогда

$$\phi(t) = \phi_0 \cos \omega t . \quad (3.9)$$

Частота колебаний, согласно (3.6), зависит только от длины маятника L и расстояния от точки подвеса до центра масс a . Период колебаний $T = 2\pi/\omega$ равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + L^2/12}{ag}} . \quad (3.10)$$

Как известно, период колебаний математического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} , \quad (3.11)$$

где l - длина математического маятника. Поэтому величину

$$L_{np} = a + L^2/(12a) \quad (3.12)$$

называют приведенной длиной физического маятника. Точку O' , отстоящую от точки опоры O на расстояние L_{np} , называют центром качания физического маятника. Можно доказать, что точка опоры и центр качания обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период колебания должен быть таким же, как и при качании вокруг точки O .

Утверждение, что период колебаний физического маятника не зависит ни от фазы, ни от амплитуды колебаний, справедливо только для колебаний, подчиняющихся уравнению (3.5). Однако даже при достаточно большом угле $\phi_0 = 20^\circ$ поправка к T , зависящая от начальной амплитуды отклонения, составляет менее 1%. Если же исследовать решение (3.14), в следующем порядке по малому параметру ϕ можно получить выражение для периода, в котором наблюдается слабая зависимость от амплитуды колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + L^2/12}{ag}} \left(1 + \frac{\phi_0^2}{16}\right). \quad (3.13)$$

При выводе уравнения (3.4) мы не учитывали возможного затухания колебаний маятника вследствие действия сил трения. Проанализируем сначала влияние силы трения для малых амплитуд колебаний в (3.15) в приближении "вязкого" трения, когда имеется пропорциональность момента сил трения угловой скорости маятника. Это приводит к появлению в (3.5) дополнительного слагаемого $\gamma\dot{\phi}$:

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi + 2\gamma\dot{\phi} = 0, \quad (3.14)$$

где $\gamma = const$ - коэффициент затухания (в механической системе он обычно называется коэффициентом вязкого трения). В этом случае решение (3.14) будет иметь вид:

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + const). \quad (3.15)$$

Как видно из (3.15), колебания в этом случае оказываются непериодическими и происходят с экспоненциальным затуханием амплитуды, причем скорость затухания определяется коэффициентом γ . В рамках такой модели происходит увеличение периода колебаний по сравнению с (3.10), однако он, тем не менее, остается независимым от начальной амплитуды отклонения:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}. \quad (3.16)$$

В случае "сухого" трения сила трения по абсолютной величине (f) не зависит от угла ϕ и направлена против направления движения. Тогда уравнение движения записывается в виде

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = \pm f, \quad (3.17)$$

где знак '+' для одного направления движения, а знак '-' для противоположного. Легко показать, что решением (3.17) с начальными условиями (3.8), является кривая, "склеенная" из кусков косинусоид с периодом (3.10), но сдвинутых по оси амплитуд на $\pm f/\omega^2$. Затухание амплитуды колебаний в этом случае линейно, на величину f/ω^2 за один полупериод. В отличие от предыдущего случая, при "сухом" трении колебания полностью затухнут за конечное время.

В реальных условиях, как правило, затухание колебаний физического маятника связано с наличием обоих видов трения.

3.2 Определение ускорения свободного падения при помощи маятника с грузами (Метод Бесселя)

Применение обратного маятника для измерения ускорения свободного падения основано на свойстве сопряженности центра качания и точки подвеса. Это свойство заключается в том, что во всяком физическом маятнике можно найти такие две точки, расположенные по разные стороны от центра масс, что при последовательном подвешивании маятника за одну и другую из них период колебаний маятника остается неизменным. Расстояние между этими точками определяет собой т.н. приведенную длину физического маятника (3.12).

Если амплитуда колебаний физического маятника мала (см. (3.5)), период его колебаний определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} . \quad (3.18)$$

Оборотные маятники, применяемые в методе Бесселя, в зависимости от предъявленных к ним требований имеют самую разнообразную форму. Они обычно состоят из металлического стержня, по которому могут передвигаться и закрепляться в том или ином положении тяжелые и легкие грузы и опорные призмы. Различные комбинации грузов и их положений на стержне относительно опорных призм дают различные типы обратных маятников.

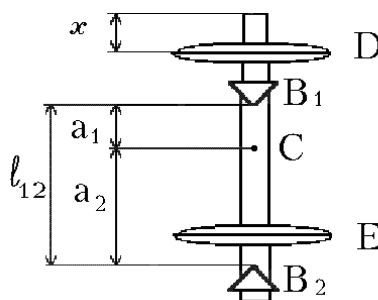


Рис. 3.2: Обратный маятник

В данной лабораторной работе применяется обратный маятник, изображенный на рис. 3.2, в котором используются два груза в форме чечевиц. На металлическом стержне опорные призмы B_1 и B_2 жестко закрепляются и не перемещаются. Жестко закреплен и груз E , находящийся между ними. Второй груз D находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по стержню и закрепляется в нужном положении. Расстояние между призмами $l_{12} = a_1 + a_2$ постоянно. Допустим, что нам удалось найти такое положение груза D , при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 около призм B_1 и B_2 совпали, т.е

$$T \approx T_1 \approx T_2 , \quad (3.19)$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mga_2}} . \quad (3.20)$$

Условием точного равенства, очевидно, будет являться равенство приведенных длин, т.е. равенство величин J_1/ma_1 и J_2/ma_2 . По теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J_1 = J_0 + ma_1^2, J_2 = J_0 + ma_2^2, \quad (3.21)$$

где J_0 - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси качания.

Исключая из (3.20)–(3.21) J_0 и m , получим формулу для определения g :

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(a_1 + a_2) = 4\pi^2 \frac{l_{12}}{T^2}. \quad (3.22)$$

Заметим, что формула (3.22) следует из (3.20)–(3.21) лишь при условии, что $a_1 \neq a_2$. При выводе формулы (3.22) мы предполагали, что $T_1 \approx T_2$. На самом деле полного равенства периодов добиться невозможно. Тогда:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma_2^2}{mga_2}}. \quad (3.23)$$

Из этих равенств имеем:

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi^2(a_1^2 - a_2^2), \quad (3.24)$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2} = 4\pi^2 \frac{l_{12}}{T_0^2}, \quad (3.25)$$

где

$$T_0^2 = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1 - a_2} = T_2^2 + \frac{a_1}{a_1 - a_2} (T_1 + T_2)(T_1 - T_2). \quad (3.26)$$

Формула (3.25) соответствует измерению g по методу Бесселя.

Оценим погрешность определения g на основании (3.25). Прежде, чем это сделать, оценим, как зависит период колебаний маятника от расстояния a между центром масс и осью качания. Из (3.20)–(3.21):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}. \quad (3.27)$$

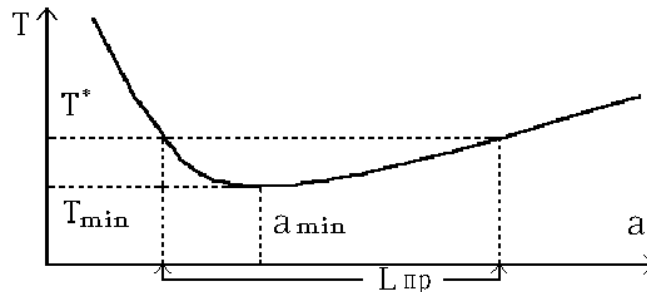


Рис. 3.3: Зависимость периода колебаний от положения чечевицы на стержне

На рис. 3.3 изображена зависимость периода колебаний маятника от расстояния между центром масс и осью качания. При этом $a = a_1$ при опоре на призму B_1 , и $a = a_2$ при опоре на призму B_2 . Если $a \rightarrow 0$, то $T \rightarrow \infty$ как $a^{-0.5}$; если $a \rightarrow \infty$, то $T \rightarrow \infty$, как $a^{0.5}$. Период минимален при $a_{min}^2 = J_0/m$. При $T > T_{min}$ одно и то же значение T достигается при двух разных значениях a , одно из которых больше, а другое меньше a_{min} .

Эти разные значения a были использованы в (3.20)–(3.22). Как ясно из графика, при изменении T величины a_1 и a_2 сближаются или удаляются друг от друга. Погрешность определения T_0 зависит от модуля разности $|a_1 - a_2|$. Действительно, дифференцируя выражение для T_0 , например, по T_1 , и полагая T_2 неизменным, найдем погрешность T_0 :

$$\delta T_0 = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \frac{T_1}{T_0} \delta T_1 \quad (3.28)$$

(здесь мы считаем, что расстояния a_1 и a_2 нам точно известны). Когда a_1 и a_2 близки друг к другу, знаменатель формулы близок к нулю, но ни a_1 , ни T_1 при этом к нулю не стремятся. Тот же вывод справедлив для пересчета погрешности δT_2 в погрешность δT_0 при неизменном T_1 . Поэтому расположение опорных призм относительно центра масс, задаваемого положением грузов, следует выбирать так, чтобы a_1 и a_2 различались, по крайней мере, в 1.5 раза.

Метод Бесселя не предполагает строгого равенства периодов, поэтому в этом случае нет смысла тратить время на уточнение этого равенства после того, как периоды оказались равны друг другу с погрешностью нескольких процентов.

Заметим, наконец, что отношение a_1/a_2 не должно быть и слишком большим. В самом деле, a_1 всегда меньше расстояния между призмами l_{12} . При больших a_1/a_2 величина a_2 неизбежно оказывается малой, и период колебаний резко возрастает. При этом увеличивается время измерений и растет роль сил трения, которые при выводе (3.8) не учитывались. Кроме того, в этом случае при данной длине маятника может вообще не найтись положения груза D, при котором совпадают T_1 и T_2 .

Таким образом, мы приходим к выводу, что отношение a_1/a_2 не должно быть ни слишком малым, ни слишком большим. Желательно, чтобы выполнялось условие $1.5 < a_1/a_2 < 3$.

3.3 Контрольные вопросы

1. Что представляет собой физический маятник? Приведите конкретный пример такой колебательной системы и поясните характер ее движения.
2. Какие колебания называются свободными?
3. Как зависит действующая на физический маятник возвращающая сила от угла отклонения?
4. Зависит ли период колебаний физического маятника от фазы, амплитуды колебаний? Если да, то как. Изменится ли ответ, если влиянием трения на движение физического маятника, совершающего колебания при малых углах отклонения, пренебречь нельзя.
5. В чем состоит свойство сопряженности центра качания физического маятника и точки его подвеса? Чему равна приведенная длина физического маятника?
6. Как зависит период колебаний T маятника от расстояния a между центром масс и осью качания? Каково асимптотическое поведение $T(a)$: $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$. При каких значениях a период минимален?

7. Опишите конструкцию оборотного маятника, используемого в настоящей работе. Каковы ограничения на расположение опорных призм относительно центра масс оборотного маятника?

3.4 Порядок выполнения работы

Задание 1. Изучение колебаний физического маятника

1. Определите диапазон амплитуд, в пределах которых период колебаний маятника T можно считать не зависящим от амплитуды. Для этого отклоните маятник из положения равновесия на некоторый угол ϕ , проведите измерения для N колебаний и определите средний период и его погрешность. Повторяя опыт при различных начальных отклонениях, можно оценить погрешность измерения периода колебаний.

Проведите измерения при большом количестве колебаний N и оцените, при каком количестве колебаний начинает сказываться затухание. Как это зависит от точки подвеса маятника?

2. Перемещая опорную призму вдоль стержня, исследуйте зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс. Не забывайте о том, что при этом приходится изменять расположение датчика для регистрации моментов прохождения маятником нижней точки движения.

Используя специальную подставку, можно найти центр масс стержня и соответствующее расстояние a . Впоследствии можно просто измерять расстояние a_0 от конца стержня до опоры C призмы, а затем пересчитывать его в расстояние a до центра масс. Очевидно, что для однородного стержня центр масс расположен в середине стержня, так что $a = L/2 - a_0$.

Полученный массив экспериментальных точек $(a_i, T_i, i = 1, \dots, S)$ удобно представить в виде графика функции aT^2 от a^2 . Как следует из (3.10), график должен иметь вид прямой, параметры которой определяют величины $4\pi^2/g$ и $\pi^2 L^2/(3g)$, поскольку должно выполняться равенство $T^2 a = 4\pi^2 a^2/g + \pi^2 L^2/(3g)$. Компьютерная программа позволяет обрабатывать данные по методу наименьших квадратов (МНК): строить прямую, находя значения g и L . Сравните полученное значение g с табличным, а величину L - с результатом непосредственных измерений (L_0). Какова возможная причина отличия полученного значения L от фактического? Проверьте на опыте обратимость точки подвеса и центра качания физического маятника.

Задание 2. Изучение колебаний оборотного маятника

1. Определите рабочий диапазон амплитуд, в пределах которого период колебаний T оборотного маятника можно считать не зависящим от амплитуды, так же, как это делалось в задании 1 (раздел 3.4).
2. Получите графики зависимости периодов колебаний оборотного маятника вокруг двух точек качания для различных положений чечевицы D на стержне. Это делается следующим образом: после измерения периода относительно опорной призмы B_1 маятник переворачивают и измеряют период колебаний относительно опорной призмы B_2 . Затем перемещают груз D , возвращают маятник в исходное положение и вновь по очереди измеряют периоды колебаний вокруг призм B_1 и B_2 . В результате цикла из S измерений

будет накоплен массив $(a_j, T_{k,j}, j = 1, \dots, S, k = 1, 2)$, где индексы k соответствуют колебаниям вокруг призм B_1 и B_2 .

Графики зависимости периода колебаний от положения чечевицы на стержне отображаются на экране дисплея. По оси абсцисс отложены деления шкалы x , указывающие положение груза D относительно конца стержня, а по оси ординат - величины периодов колебаний T_1 и T_2 . Поскольку значения a_1 и a_2 однозначно связаны с x , согласно (1.20) получаем, что точка пересечения кривых определяет местонахождение подвижной чечевицы, при котором периоды колебаний T^* наиболее близки друг к другу. Подставляя T^* в (3.22), можно вычислить значение g . Компьютер автоматически производит такие вычисления для данного расстояния l_{12} между призмами.

3. Для измерения значения g по методу Бесселя следует определить периоды колебаний T_1 и T_2 в прямом и перевернутом положении маятника, взяв достаточно большое количество колебаний, при условии, что периоды отличаются не более, чем на несколько процентов. Для определения величин a_1 и a_2 находят центр тяжести, уравновесив маятник на специальной подставке. Расстояния от этой точки (центра тяжести маятника) до опорных призм дают соответственно величины a_1 и a_2 . Их измерения производятся масштабной линейкой. После ввода этих данных компьютерная программа по формуле Бесселя (3.26) автоматически определяет величину ускорения свободного падения и оценивает его погрешность.