

Математический анализ (1-й семестр)

для факультета фундаментальной физико-химической инженерии

Программа коллоквиума¹

осень 2018 г.

1. Доказательство по индукции. Неравенство Бернулли и его следствия.
2. отображения произвольных множеств-I: отображение, сюръекция, инъекция, биекция, образ и прообраз элемента и множества.
3. отображения произвольных множеств-II: отображение, композиция отображений, тождественное и обратное отображения, сужение отображения.
4. Числовые функции: ограниченные, монотонные и строго монотонные функции. Параметрическое задание функции. Числовые последовательности.
5. Непрерывность функции в точке. Непрерывность $|x|$, линейной функции и \sqrt{x} .
6. Неравенства $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$. Непрерывность синуса, косинуса и арктангенса.
7. Предел функции в точке и в $\pm\infty$ -I: определения и примеры, единственность предела, локальность предела. Связь между непрерывностью и пределом функции.
8. Предел функции в точке и в $\pm\infty$ -II: определения и примеры, локальные свойства ограниченности и сохранения неравенства. Локальные свойства ограниченности и сохранения знака для непрерывных функций.
9. Предел, равный $\pm\infty$. Перестановочность предельного перехода и непрерывной функции. Непрерывность композиции непрерывных функций. Предел композиции функций (замена переменной в пределе).
10. Бесконечно малые функции (бмф). Связь между пределом функции и бесконечно малыми. Сумма бмф, произведение бмф и ограниченной функции, *связь бмф с бесконечно большими функциями*.
11. Предел суммы, произведения и *частного*. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность многочленов, рациональных функций, арксинуса.

¹Помимо знания материала, подробно описанного в пунктах программы, и примеров к нему, предполагается умение понимать и использовать логическую и теоретико-множественную терминологию и символику, владение понятиями модуля числа, промежутков и окрестностей на расширенной числовой прямой.

Курсив означает необязательность знания соответствующих доказательств.

12. *Предельный переход в неравенстве (монотонность предела)*. Теорема о зажатой переменной (оценочный признак существования предела). Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
13. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность функции: определения и примеры. Связь с обычными (двусторонними) пределом и непрерывностью.
14. Верхние и нижние грани числовых множеств. Точная верхняя и точная нижняя грани (супремум и инфимум). Критерий точной верхней грани. Специфическая аксиома множества действительных чисел — принцип полноты Вейерштрасса.
15. Предел последовательности. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ при различных $q \in \mathbb{R}$. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. *Определение показательной функции $\exp x$ как предела последовательности*. Число e .
16. Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ и связанные с ним пределы: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$. Непрерывность показательной функции.
17. Сравнение бесконечно малых-I: O -большое, эквивалентность функций, её свойства и применение в вычислении пределов. Запись замечательных пределов в форме эквивалентностей.
18. Сравнение бесконечно малых-II: o -малое, *его свойства*, метод выделения главной части и его применение в вычислении пределов. Запись замечательных пределов в форме равенств с o .
19. Асимптоты графика функции (правая и левая). Критерий существования асимптоты и формулы для её коэффициентов.

Математический анализ (2-ой семестр)

для факультета фундаментальной физико-химической инженерии

Программа коллоквиума¹

весна 2019 г.

1. Разбиение отрезка, диаметр разбиения, размеченное разбиение, интегральная сумма Римана. Определённый интеграл (интеграл Римана) функции на отрезке: его определение как предела интегральных сумм *и единственность*.
2. Необходимое условие интегрируемости. Верхняя и нижняя суммы Дарбу ограниченной функции. *Критерий Дарбу интегрируемости*. Пример ограниченной неинтегрируемой функции (функция Дирихле).
3. Простейшие свойства определённого интеграла: *линейность, неотрицательность (интегрирование неравенств)*, независимость от изменения значений функции в конечном числе точек.
4. Интегрируемость на подотрезках, *аддитивность интеграла по отрезкам*, монотонность по отрезкам.
5. *Интегрируемость модуля и произведения*. Интегральная теорема о среднем.
6. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных *и монотонных функций*.
7. Формула Ньютона – Лейбница. Интеграл с переменным верхним пределом как первообразная. Существование первообразной у непрерывной функции.
8. Интегрирование по частям и замена переменной в определённом интеграле.
9. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме и с остатком в форме Лагранжа. Представление функции своим рядом Тейлора.
10. Несобственный интеграл (с особенностями в верхнем, нижнем или обоих пределах интегрирования). Примеры сходящихся и расходящихся интегралов. Равенство несобственного и собственного интегралов, если последний существует.
11. Свойства несобственного интеграла: *линейность, интегрирование неравенств, формула Ньютона – Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла*.

¹Помимо знания материала, подробно описанного в пунктах программы, предполагается знание примеров к нему. *Курсив* означает необязательность знания соответствующих доказательств.

12. Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Признак сравнения; признак сравнения в предельной форме (метод выделения главной части). Пример: сходимость интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx$.
Интегральный признак сходимости ряда.
13. Абсолютная и условная сходимость-I: определение, сходимость абсолютно сходящегося интеграла, признаки сходимости Абеля и Дирихле. Интеграл Дирихле (сходимость и значение).
14. Абсолютная и условная сходимость-II: определение, признаки сходимости Абеля и Дирихле. Примеры: сходимость интегралов $\int_a^{\infty} \frac{\sin kx}{x^s}$ и $\int_a^{\infty} \frac{\cos kx}{x^s}$ ($s > 0$, $k \neq 0$) при $a > 0$ и при $a = 0$. Интегралы Френеля (сходимость и значение).
15. Г-функция Эйлера: определение и его корректность (сходимость интеграла), формулы понижения и дополнения, другое интегральное представление. Интеграл Эйлера – Пуассона. Формула Стирлинга для Г-функции и для факториала.
16. В-функция Эйлера: определение и его корректность (сходимость интеграла), симметричность, другое интегральное представление. Связь В- и Г-функций.
Пример: вычисление интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx$.
17. Аддитивные функции промежутка: свойства, достаточное условие порождённости интегралом.
18. Вычисление площади плоской фигуры при явном, полярном и параметрическом задании ограничивающих её кривых. Вычисление длины кривой, заданной параметрически, явно и в полярных координатах.
19. Вычисление объёма и площади поверхности тела вращения, объёма тела с известными поперечными сечениями. Нахождение массы, моментов и центра масс кривой. Теоремы Гульдина – Паппа.