В.И. Гаврилов. Математический анализ I.

Математический анализ лежит в основании математического образования студентов высшей школы, обучающихся всем естественнонаучным и техническим специальностям, по следующим причинам. Во-первых, он поставляет математический аппарат, который используют все другие математические курсы и учебные курсы по всем другим естественнонаучным и техническим дисциплинам, и значит, используют специалисты, работающие в областях естественнонаучных и технических наук. Во-вторых, и что не менее важно, математический анализ формирует математическое мировоззрение и математическую культуру, необходимые не только профессионалам-математикам, но и всем профессионалам, связанным с изучением научных проблем в естествознании и технике.

Обязательный курс математического анализа, читаемый на факультете фундаментальной физико-химической инженерии Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в течение первых трёх семестров по шесть часов в неделю, полностью соответствует решению обеих стоящих перед ним задач.

Программа курса в первом семестре содержит следующие разделы: введение в математический анализ, включающее теорию пределов и свойства непрерывных функций; дифференциальное исчисление функций единого переменного и основные положения теории неопределенного интеграла.

Раздел I. Введение в математический анализ.

Основу математического анализа образует множество действительных чисел, а основными объектами исследования служат функции над этим множеством. Поэтому первая глава имеет название:

Глава 1. Действительные числа и числовые функции.

Главу начнем вводным параграфом, в котором демонстрируется мотивация изучения курса на примере двух достаточно глубоких задач физики: свободных колебаний и движение математического маятника.

Для полного понимания изложения достаточны знания в объёме школьного курса алгебры и начал анализа. Требуется владение основными приёмами дифференцирования функций, понимание механического смысла первой и второй производной как скорости и ускорения движения, а также принятие таких интуитивно понятных фактов, что функция постоянна на промежутке, если её производная всюду на нём равна нулю (другими словами, движения не происходит при нулевой скорости) и что в приближённых вычислениях синусы достаточно малых углов можно заменять значениями этих углов (в радианах). Впрочем, все эти высказанные утверждения будут полностью обоснованы в нашем курсе.

§0. Две задачи физики

0.1. Свободные колебания.

Типовая модель, иллюстрирующая это физическое явление, состоит в следующем. На горизонтальной пружине, закрепленной в обоих концах, навешен груз массы m. Отведем его на немного в сторону от положения равновесия и отпустим. Груз начнет совершать движение, которое называют *свободным колебанием*, и нужно изучить закон этого движения.

Чтобы не осложнять вычислений, считают, что движение груза обусловлено наличием *только двух факторов*: 1) *восстанавливающей силы пружины*, и 2) *сопротивлением среды*, а сам *груз* принимают за *материальную точку* (чтобы иметь возможность использовать законы классической механики).

0.2. Гармонические колебания.

Разберем сначала случай *отсутствия сопротивления среды*. Восстанавливающая сила пружины, т. е. сила, которая стремится вернуть груз в положение равновесия, по своей величине *пропорциональна* размеру отклонения груза от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную направлению смещения груза (закон Гука).

Возьмем ось Ox по оси пружины (см. рис. 1) и начало координат O поместим в точке равновесия. Тогда положение груза определяется его координатой x, которая меняется со временем t; т. е. x есть функция времени t: $x = x(t)$. Надо найти эту неизвестную функцию и по ней изучить колебания груза.

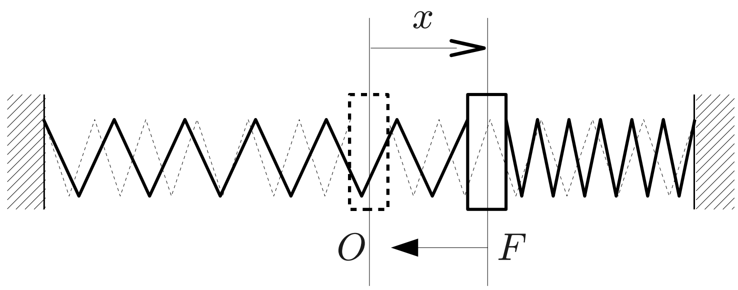

Рис. 1.

Уравнение движения груза, на основании второго закона классической механики, имеет вид

$$F = mj, \tag{1}$$

где j — ускорение груза, как известно, равное второй производной x'', а F есть сумма всех сил, действующих на груз. В рассматриваемом случае

$F = -kx$, $k > 0$ — постоянная, и знак минус поставлен потому, что сила сопротивления пружины направлена от груза к началу координат: если $x > 0$, то сила направлена в отрицательном направлении оси Ox, а если $x < 0$, то сила направлена в положительном направлении оси Ox. Подставляя эти значения для силы и ускорения в уравнение (1), получим уравнение движения груза $mx'' = -kx$, или

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) есть частный случай дифференциального уравнения второго порядка

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{3}$$

в котором $\omega > 0$ — фиксированное число, а $x = x(t)$ — неизвестная функция аргумента t, уже никак не связанного со временем, а являющегося независимой переменной со своей областью задания. Дифференциальное уравнение (3) называют *уравнением колебания* (и уравнение (2) объясняет происхождение этого названия).

Таким образом, физическую модель изучаемого природного явления мы описали математическим языком и применим теперь математические методы для нахождения решения. При этом будет рассматриваться не конкретная математическая модель (2), а ее общее представление (3).

Понятно, что постоянная функция $x = x(t) = 0$ есть решение дифференциального уравнения (3) для всех t на числовой прямой. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{4}$$

в которой C_1, C_2 — произвольные постоянные, также является решением уравнения (3) при всех t, поскольку $x'' = -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t$ и $x'' + \omega^2 x = 0$. Более того, функция (4) служит *общим решением* дифференциального уравнения (3) в том смысле, что любое решение $u = u(t)$ уравнения (3) можно получить из формулы (4) надлежащим выбором чисел C_1 и C_2.

$\lhd$ Обоснование этого наблюдения разобьем на три несложных шага.

(i) Проверим сначала, что если функция f есть решение уравнения (3) и $f(0) = f'(0) = 0$, то $f(t) = 0$ для всех t.

Рассмотрим функцию $(f')^2 + \omega^2 f^2$, которая в модельном случае уравнения (2) при $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ совпадает с удвоенной полной энергией E груза, деленной на его массу m (поскольку полагая $f = x$, $f' = x' = v$, имеем

$$\frac{m}{2}\Big[(f')^2 + \frac{k}{m}f^2\Big] = \frac{m}{2}\Big[(x')^2 + \frac{k}{m}x^2\Big] = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_{\text{кин}} + E_{\text{потенц}} = E,$$

где $E_{\text{потенц}} = \dfrac{kx^2}{2}$ есть работа силы Гука). Так как f удовлетворяет уравнению (3), то $f'' + \omega^2 f = 0$ и поэтому

$$\bigl((f')^2 + \omega^2 f^2\bigr)' = 2f' \cdot f'' + 2\omega^2 f \cdot f' = 2f'(f'' + \omega^2 f) = 0.$$

Отсюда, по критерию постоянства функции на промежутке (понятном и с физической точки зрения: если производная, т. е. скорость изменения функции, равна нулю, то движения нет и функция постоянная), заключаем, что $(f')^2 + \omega^2 f^2 = C$, где C — некоторая постоянная (закон сохранения полной энергии). Поскольку $f(0) = f'(0) = 0$, получаем $C = 0$ и $(f')^2 + \omega^2 f^2 = 0$. Поэтому $\omega^2 f^2 = 0$, $f^2 = 0$, $f = 0$ (число $\omega > 0$).

(ii) Если функции f и g суть такие два решения уравнения (3), что $f(0) = g(0)$ и $f'(0) = g'(0)$, то $f = g$.

Действительно, для функции $h = f - g$ имеем

$$h'' = f'' - g'' = -\omega^2 f + \omega^2 g = -\omega^2 (f - g) = -\omega^2 h,$$

так что h есть решение уравнения (3), у которого, по условию, $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. На основании шага (i) заключаем, что $h = 0$ для всех t.

(iii) Остается проверить, что для любого решения $u = u(t)$ уравнения (3) можно указать такие числа C_1 и C_2, что

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Для этого рассмотрим функцию $g(t) = u(0) \cos \omega t + \dfrac{u'(0)}{\omega} \sin \omega t$, которая, как отмечено выше, есть решение уравнения (3). Поскольку $g'(t) = -u(0)\omega \sin \omega t + u'(0) \cos \omega t$, то $g(0) = u(0)$ и $g'(0) = u'(0)$ и на основании шага (ii) имеем $u(t) = g(t)$.

Этим завершается доказательство утверждения, что формула (4) задает общее решение дифференциального уравнения (3). $\triangleright$

Функцию (4) можно записать в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \tag{5}$$

где $A \geqslant 0$ и φ — произвольные постоянные.

Действительно, положим $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Тогда если $A = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$ и формула (5) верна; угол φ можно взять любым. Если $A > 0$, то точка $\left(\dfrac{C_1}{A}, -\dfrac{C_2}{A}\right)$ лежит на единичной окружности, так как $\left(\dfrac{C_1}{A}\right)^2 + \left(-\dfrac{C_2}{A}\right)^2 = 1$, и поэтому существует такой угол φ, что $\cos\varphi = \dfrac{C_1}{A}$, $\sin\varphi = -\dfrac{C_2}{A}$, откуда

$$C_1 = A \cos\varphi, \quad C_2 = -A \sin\varphi. \tag{6}$$

Подставив значения (6) в формулу (4), получим

$$x = A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi = A\cos(\omega t+\varphi)$$

и формула (5) доказана.

Функция (5) описывает *гармонический колебательный процесс.* Положительная константа A называется *амплитудой* колебания (5), а φ — его *начальной фазой* или просто *фазой.* Число ω называется *круговой частотой* колебаний, в отличие от обычной частоты $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$, равной числу колебаний в секунду.

Возвращаясь к уравнению колебания (2), видим, что его общее решение имеет вид

$$x = C_1\cos\Bigl(t\sqrt{\frac{k}{m}}\Bigr) + C_2\sin\Bigl(t\sqrt{\frac{k}{m}}\Bigr), \tag{7}$$

или

$$x = A\cos\Bigl(t\sqrt{\frac{k}{m}}+\varphi\Bigr). \tag{8}$$

Формула (8) показывает, что груз совершает *гармонические колебания* около точки равновесия O с амплитудой A и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{9}$$

Конечно, некоторые выводы (в основном, качественного характера) о колебании груза можно сделать и без формул (8), (9), основываясь на физических соображениях. Например, ясно, что с увеличением массы груза колебания будут происходить медленнее — их период увеличится, а с увеличением жесткости пружины (т. е. с увеличением k) колебания убыстрятся, их период уменьшится. Однако только формула (9) объясняет, почему при увеличении массы груза, скажем, в 4 раза период колебаний увеличивается в 2 раза и не более, а при увеличении жесткости пружины в те же 4 раза период колебаний уменьшится только в 2 раза.

Рассмотрим два конкретных (но знаковых) случая задачи (2) о колебании груза, напоминая, что x' есть скорость v его движения.

I. *В начальный момент времени $t = 0$ груз отведен от положения равновесия в положение $x_0 > 0$ (см. рис. 1) и отпущен.*

Здесь закон движения описывается формулой (8) и начальными условиями $x(0) = x_0 > 0$ и $x'(0) = v_0 = 0$. Поскольку

$$x' = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\Bigl(t\sqrt{\frac{k}{m}}+\varphi\Bigr),$$

то $x_0 = x(0) = A\cos\varphi$ и $v_0 = x'(0) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\varphi = 0$. Поэтому $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ и, так как $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ и $A > 0$, то $0 < x_0 = A\cos 0 = A$, что приводит к ответу:

$$x = x_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right);$$

амплитуда колебания равна x_0.

II. *В начальный момент времени $t = 0$ груз находится в положении равновесия и его подталкивают; т. е. придают ему некоторую скорость* $v_0 > 0$. Теперь закон движения описывается формулой (8) и начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$. Поэтому $0 = x(0) = A\cos\varphi$ и $v_0 = x'(0) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\varphi$, так что $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ или $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. С учетом $v_0 > 0$ и $A > 0$ имеем $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ и $A = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Подставляя найденные значения A и φ в (8), получим ответ

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{3\pi}{2}\right) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right),$$

и амплитуда колебаний равна $v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Как следует из способа доказательства вида общего решения (4) (шаг (iii)), в общем случае, когда *в начальный момент времени $t = 0$ груз отведен от положения равновесия в положение x_0 и ему придана начальная скорость* v_0, движение груза образуется сложением движений в разобранных выше случаях. Закон движения описывается формулой (7), в которой $C_1 = x_0$ и $C_2 = v_0\sqrt{m/k}$; амплитуда колебаний равна $\sqrt{x_0^2 + \dfrac{m}{k}v_0^2}$.

0.3. Затухающие колебания.

Обратимся теперь к общему случаю, изучение которого проведем в той же системе координат, что и для гармонических колебаний. Однако чтобы различать случаи, договоримся закон движения груза обозначать теперь другой функцией $s = s(t)$, хотя s по-прежнему служит координатой положения груза на оси Ox в момент времени t. Теперь скорость движения груза в момент t равна $s'(t)$, а ускорение равно $s''(t)$.

Восстанавливающая сила пружины подчиняется закону Гука, ее величина равна as, $a > 0$ — коэффициент пропорциональности, и она направлена в сторону, противоположную направлению смещения груза. Сопротивление среды, по результатам опыта, принимают *пропорциональным скорости движения* груза и, следовательно, величина сопротивления равна bs', $b > 0$ — коэффициент пропорциональности, и сила направлена в сторону, противоположную направлению движения.

Теперь второй закон классической механики приводит к дифференциальному уравнению $ms'' = -bs' - as$ или $s'' + \frac{b}{m}s' + \frac{a}{m}s = 0$. Обозначив $\frac{b}{m} = 2h$ и $\frac{a}{m} = n^2$, получим окончательно уравнение

$$s'' + 2hs' + n^2 s = 0, \tag{10}$$

в котором число h называется *коэффициентом затухания* (ср. [1, с. 424]), а n^2 — *коэффициентом восстановления*.

При решении уравнения (10) различают три *качественно различных* случая: а) $0 < h < n$ (сопротивление среды присутствует, но оно не очень значительно); б) $0 < n < h$ (сопротивление среды весьма значительно; *вязкая среда*), и в) $0 < n = h$ (*случай критического сопротивления*, ср. [1, с. 430]).

Рассмотрим сначала случай а) $0 < h < n$. Обозначим $n^2 - h^2 = \omega^2$, $\omega > 0$, и покажем, что общее решение уравнения (10) представляется формулой

$$s = e^{-ht}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \tag{11}$$

в которой C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Мы знаем, что формулой $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ задается общее решение уравнения колебания (3). Следовательно, поскольку $s = xe^{-ht}$, сформулированное утверждение будет доказано, если мы установим, что функция $s = s(t)$ есть решение уравнения (10) тогда и только тогда, когда $x = x(t)$ есть решение уравнения колебания (3) с $\omega^2 = n^2 - h^2$.

Приведем подробное обоснование одного из этих утверждений; другое доказывается аналогично. Итак, пусть функция $s = s(t)$ есть решение уравнения (10); т. е. $s'' + 2hs' + n^2 s = 0$. Тогда функция $x = se^{ht}$ имеет

$$x'' = e^{ht}(s'' + 2hs' + h^2 s), \tag{12}$$

и поскольку $e^{ht} > 0$, то

$$x'' + \omega^2 x = e^{ht}(s'' + 2hs' + h^2 s) + (n^2 - h^2)e^{ht}s = e^{ht}(s'' + 2hs' + n^2 s) = 0;$$

т. е. $x = se^{ht}$ есть решение уравнения (3) с $\omega^2 = n^2 - h^2$.

Формулу (11) можно преобразовать, подставив в ее правую часть формулу (5), но можно изменить параметры

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha, \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

и получить
$$s = Ae^{-ht}\sin(\omega t + \alpha). \tag{13}$$

Для выяснения вида графика функции (13) считаем в ней $A > 0$, $\alpha = 0$, и теперь график функции
$$s = Ae^{-ht}\sin\omega t \tag{13$'$}$$
сравним с синусоидой $s = A\sin\omega t$. Так как $e^{-ht} > 0$, то, очевидно, оба графика пересекают ось абсцисс в одних и тех же точках $t = i\frac{\pi}{\omega}$, $i \in \mathbb{Z}$. Кроме того, функция $s = A\sin\omega t$ имеет попеременно максимумы и минимумы в точках $t = \left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}$, в которых обращается в нуль ее производная $s' = A\omega\cos\omega t$. Рассмотрим производную функции (13$'$):
$$s' = Ae^{-ht}(\omega\cos\omega t - h\sin\omega t) = \\ = A\sqrt{\omega^2+h^2}e^{-ht}\Big(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+h^2}}\cos\omega t - \frac{h}{\sqrt{\omega^2+h^2}}\sin\omega t\Big)$$
и, вводя вспомогательный угол θ под условием
$$\frac{\omega}{n} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+h^2}} = \cos\theta, \quad \frac{h}{n} = \frac{h}{\sqrt{\omega^2+h^2}} = \sin\theta,$$
запишем ее в виде
$$s' = Ane^{-ht}\cos(\omega t + \theta), \quad n = \sqrt{\omega^2+h^2}.$$
Она обращается в нуль в точках
$$t = \Big(i + \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi}{\omega} - \frac{\theta}{\omega},$$
и так как косинус, проходя через нуль, меняет знак, то заключаем, что при этих значениях t функция (13$'$) действительно имеет максимумы при i четных и минимумы при i нечетных. По сравнению с синусоидой произошло *смещение* экстремальных точек влево на величину $\frac{\theta}{\omega}$.

Нетрудно проверить, что все максимумы будут положительными, а минимумы отрицательными. Если величину i-ого экстремума обозначить через A_i, то
$$\left|\frac{A_i}{A_{i+1}}\right| = e^{\frac{h\pi}{\omega}}, \quad i \in \mathbb{Z},$$
так что размахи убывают в геометрической прогрессии. График функции (13$'$) для простого частного случая и $t \geqslant 0$ изображен на рис. 2 (см. также [1, с. 426]).

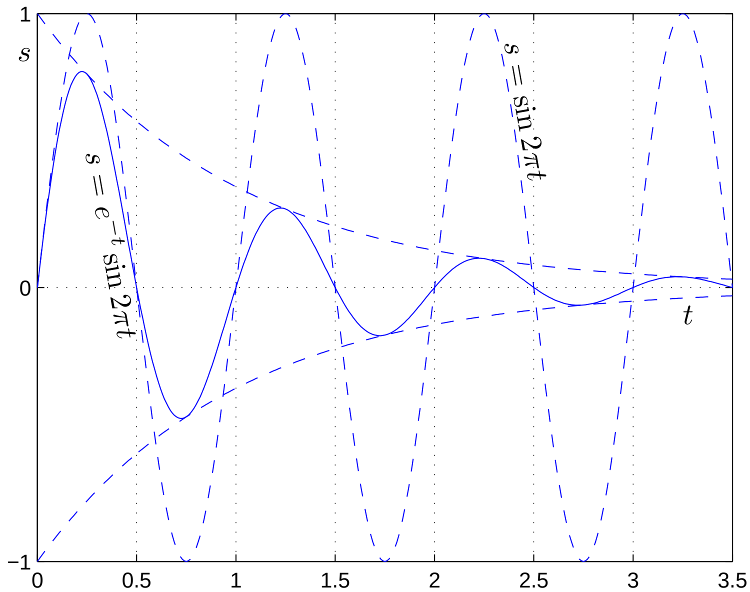

Рис. 2.

Движение подобного типа носит название *затухающего колебания*.

0.4. Непериодические колебания (апериодические колебания).

Картина движения груза меняется качественно, если среда становится все более вязкой; т. е. если в уравнении движения (10) его коэффициенты связаны отношением $h \geqslant n > 0$. Проиллюстрируем это в простейшем случае, когда $h = n$. В этом случае уравнение (10) принимает вид

$$s'' + 2hs' + h^2 s = 0. \tag{14}$$

Умножая обе части уравнения (14) на множитель $e^{ht} > 0$ и вспоминая формулу (12), заключаем, что уравнение (14) равносильно уравнению

$$z'' = 0$$

для функции $z = se^{ht}$. Тогда имеем $z' = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная, или $(z - C_1 t)' = 0$. Поэтому $z = C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, и

$$s = e^{-ht}(C_1 t + C_2). \tag{15}$$

Функция (15) *не периодическая.* Кроме того, $s \to 0$ при $t \to +\infty$, так как

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1 t + C_2}{e^{ht}} = 0,$$

причем производная $s' = -e^{-ht}(hC_1 t + C_2 h - C_1)$ сохраняет свой знак, начиная с точки $t = \dfrac{1}{h} - \dfrac{C_2}{C_1}$, т. е. s становится монотонной.

Следовательно, в рассматриваемом случае движение *не является колебательным*, и груз быстро стремится занять положение равновесия. График функции (15) в случае, когда $C_1 = C_2 = h = 1$, представлен на рис. 3 (ср. также [1, с. 430]).

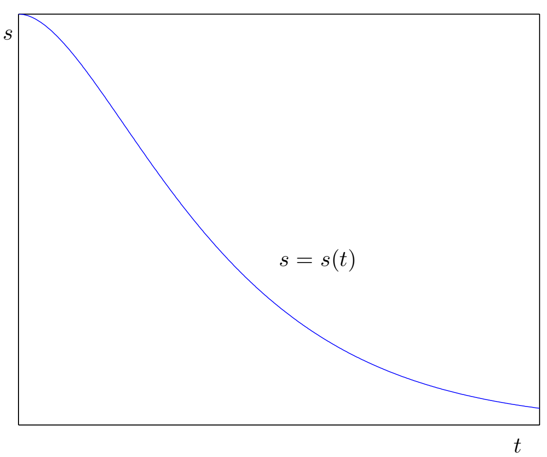

Рис. 3.

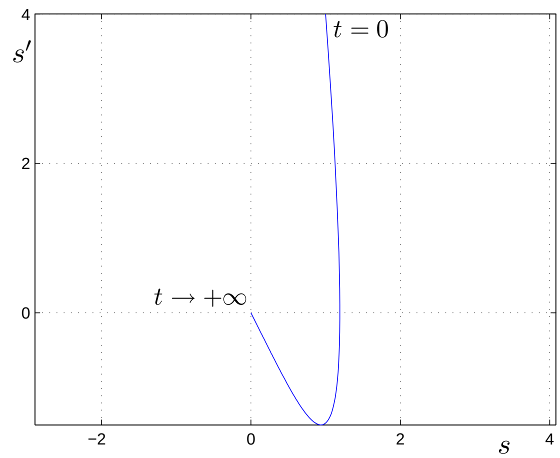

Рис. 3′.

Когда имеет место случай б) $h > n > 0$ (вязкая среда), *эффект апериодичности* решения $s = s(t)$ качественно меняется. В этом случае общее решение $s = s(t)$ уравнения (10) задается формулой

$$s = C_1 e^{-(h-p)t} + C_2 e^{-(h+p)t}, \tag{16}$$

в которой C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $p = \sqrt{h^2 - n^2}$, $0 < p < h$.

Типичное поведение решения (16) изображено на рис. 3′ в фазовой плоскости, на которой откладывается $(s(t), s'(t))$ при каждом значении времени t (для примера взяты $h = 5$, $n = 4$, $p = 3$, $C_1 = 2$, $C_2 = -1$), где видно, что кривая при $t \to +\infty$ асимптотически стремится к прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом $-(h-p)$ (см. также [1, с. 430]).

Доказательство формулы (16) проводится с небольшими изменениями аналогично доказательству формулы (4). Покажем, например, как проходятся шаги (i) и (iii).

(i) Проверим, что если функция f удовлетворяет уравнению (10) и $f(0) = f'(0) = 0$, то $f = 0$ при $t \geqslant 0$.

Действительно, рассмотрим функцию $(f')^2 + n^2 f^2$ и ее производную:

$$\left((f')^2 + n^2 f^2\right)' = 2f'f'' + 2n^2 f f' = 2f'(f'' + n^2 f).$$

Согласно уравнению (10), $f'' + n^2 f = -2hf'$, поэтому $\left((f')^2 + n^2 f^2\right)' = -4h(f')^2 \leqslant 0$. Следовательно, функция $(f')^2 + n^2 f^2$, принимающая неотрицательные значения, невозрастает при $t \geqslant 0$. Так как при $t = 0$ имеем $(f')^2 + n^2 f^2 = 0$, то из невозрастания и неотрицательности этой функции вытекает, что она равна нулю и при всех $t \geqslant 0$. Значит, $(f')^2 = 0$, $f' = 0$ и f постоянна при $t \geqslant 0$, причем эта постоянная равна нулю в силу $f(0) = 0$.

(iii) Проверим, что для любого решения $u = u(t)$ уравнения (10) можно подобрать такие постоянные числа C_1 и C_2, что u будет равна функции (16).

Для этого обозначим $u(0) = x_0$, $u'(0) = v_0$ и рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{v_0 + x_0(h+p)}{2p} e^{-(h-p)t} - \frac{v_0 + x_0(h-p)}{2p} e^{-(h+p)t}.$$

Она имеет производную

$$g'(t) = -\frac{v_0(h-p) + x_0(h^2 - p^2)}{2p} e^{-(h-p)t} + \frac{v_0(h+p) + x_0(h^2 - p^2)}{2p} e^{-(h+p)t}.$$

Из этих двух формул видно, что $g(0) = x_0 = u(0)$ и $g'(0) = v_0 = u'(0)$. Согласно шагу (ii), $u(t) = g(t)$ для $t \geqslant 0$, что заканчивает доказательство шага (iii).

Таким способом удается доказать утверждение об общем решении только для значений $t \geqslant 0$, но беря в качестве начального времени вместо 0 все меньшие и меньшие значения $t_0 < 0$, можно распространить общий вид решения (16) (с теми же значениями постоянных C_1 и C_2) для всех t.

0.5. Задача о математическом маятнике.

Составим и решим приближенно уравнение *математического маятника*. Математический маятник представляет собой точку M массы m, которая под действием силы тяжести движется по окружности K радиуса l, лежащей в вертикальной плоскости. Величину l называют *длиной маятника*. На окружности K выберем угловую координату, приняв за начало координат самую нижнюю точку O окружности K (рис. 4).

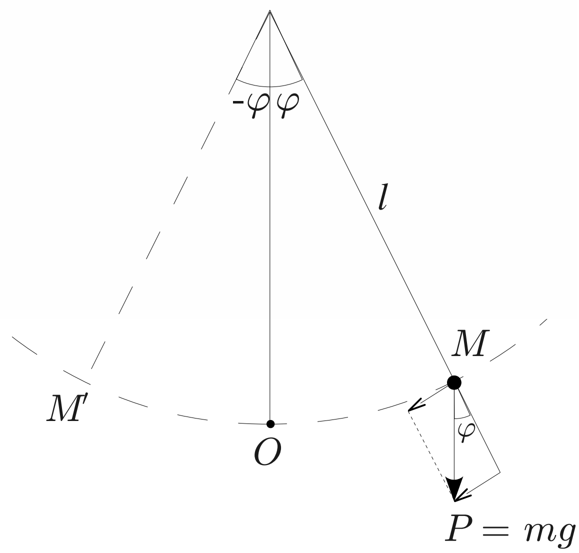

Рис. 4.

Переменную координату точки M обозначим через $\varphi = \varphi(t)$, где t есть время на перемещение из точки O в точку M. Точка M находится под действием силы тяжести $P = mg$, направленной вертикально вниз. Составляющая этой силы, направленная по нормали к окружности, уравновешивается благодаря реакции связи (окружности или нити, заставляющей точку двигаться по окружности). Составляющая силы P, направленная по касательной к окружности в точке M, равна $-mg\sin\varphi$ (если за положительное направление на касательной принять направление, соответствующее возрастанию угла φ). Таким образом, длина пути OM равна $l\varphi$, и в соответствии со вторым законом классической механики уравнение движения точки M имеет вид: $m(l\varphi)'' = F = -mg\sin\varphi$, или

$$l\varphi'' + g\sin\varphi = 0. \tag{17}$$

Нахождение решения этого уравнения представляет большие трудности (см. [2, с. 408–413] или [3, с. 250–253]). Однако если предположить, что координата φ точки M в процессе движения *мало отклоняется от нуля*, то приближенно в уравнении (17) можно заменить $\sin\varphi$ на φ и получить "приближенное" уравнение движения маятника в виде

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0. \tag{18}$$

Таким образом, период колебания; т. е. время на перемещение из точки M в симметричную ей точку M' на окружности K, задается приближенной формулой $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, которая обычно приводится в элементарных (в частности, в школьных) курсах физики, а частота "малых колебаний" маятника определяется формулой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Число ν малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Поэтому, длина *секундного маятника*; т. е. маятника, совершающего одно колебание в секунду ($\nu = 1/\text{сек}$), определяется формулой

$$l = \frac{g}{4\pi^2}\,\text{сек}^2 \approx 0{,}25\,\text{м}.$$

Заключение

В математическом анализе давно известна методика отыскания общего решения дифференциальных уравнений (10) (обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами), использующие несложные действия над неопределенными интегралами и комплексными числами. Однако последние не входят в программы средней школы, и поэтому нам пришлось здесь для решения дифференциальных уравнений вида (3) и (10) воспользоваться искусственными методами, зная заранее ответ. Определенным оправданием этих наших действий служит отмеченная выше их доступность школьникам старших классов общеобразовательных школ, а также их физическая интерпретация.

Список литературы

[1] В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. Курс теоретической механики. М.: Высш. школа, 1983. — 575 с., ил.

[2] Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. Изд. 6-ое, доп. М.: Наука, 1965. — 468 с.

[3] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. — 800 с.