IV. Статика и гидростатика

Твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется с течением времени (или меняется пренебрежимо мало).

1. Для равновесия *твердого тела* или системы тел необходимо одновременное выполнение двух условий:

I условие равновесия: Сумма *внешних* сил, действующих на систему, должна быть равна нулю.

Внешними называются силы, действующие на тела, входящие в систему, со стороны тел, не входящих в эту систему.

$$\boxed{\vec{F}_1^{\,\text{внеш}} + \vec{F}_2^{\,\text{внеш}} + \ldots = 0}$$

II условие равновесия: Сумма *моментов* внешних сил, действующих на систему, должна быть равна нулю относительно любой оси вращения.

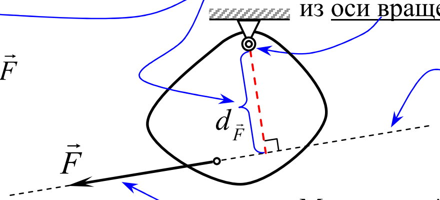
$$\boxed{M_{\vec{F}_1^{\text{внеш}}} + M_{\vec{F}_2^{\text{внеш}}} + \ldots = 0}$$

2. **Вращающим моментом** силы относительно оси вращения называется взятое со знаком «+» или «–» произведение модуля этой силы на ее *плечо*.

$$\boxed{M_{\vec{F}} = \pm F \cdot d_{\vec{F}}}$$

Плечом силы называется длина перпендикуляра, проведенного из оси вращения на линию действия этой силы

Знак «+» берется, если сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело *против часовой стрелки*, **знак «–»** — если *по часовой*.



Замечание.
Приведенное здесь определение вращающего момента справедливо лишь для сил, лежащих в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Единица измерения M в СИ: 1 Н·м

Момент этой силы — отрицательное число: $M_{\vec{F}} < 0$

3. Не всегда одновременное выполнение I и II условий равновесия гарантирует неподвижность механической системы. Покой системы невозможен в положениях **неустойчивого равновесия** (т.е. в таких положениях, любое бесконечно малое смещение из которых, приводит к тому, что сумма внешних сил (или их моментов) стремится еще больше удалить систему от равновесного положения). Реализованы могут быть только положения **устойчивого равновесия** (т.е. такие положения, любое бесконечно малое смещение из которых, приводит к тому, что сумма внешних сил (или их моментов) стремится вернуть систему обратно в равновесное положение) и положения **безразличного равновесия** (т.е. положения, при бесконечно малых смещениях из которых сумма внешних сил и их моментов остается равна нулю).

4. **Центром масс** системы материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_N$ называется геометрическая точка (C), координаты которой определяются формулами:

$$\boxed{x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}; \quad y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}; \quad z_C = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_Nz_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}}$$

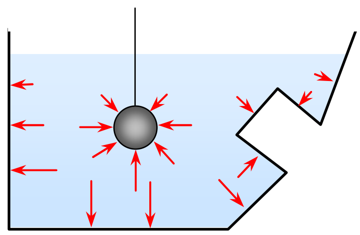
Центр тяжести (т. е. точка приложения равнодействующей силы тяжести) совпадает с центром масс системы, если эта система находится в однородном гравитационном поле (или напряженность поля тяготения меняется в пределах системы незначительно)

5. **Сила гидростатического давления** — сила, с которой покоящаяся жидкость действует на погруженные в нее тела, стенки и дно сосуда, в котором находится (без учета поверхностного натяжения).

(т.е. жидкость неподвижная относительно стенок сосуда)

По своей природе эта сила является силой объемной упругости. Она возникает, если жидкость сжата (например, прижата силой тяготения к внутренней поверхности неподвижного сосуда) и зависит от степени сжатия.

Сила гидростатического давления всегда направлена перпендикулярно к той поверхности, на которую она действует (поскольку сила объемной упругости не может иметь составляющей параллельной поверхности, деформированного тела, а упругостью формы жидкость не обладает)



6. **Давлением жидкости** на плоскую поверхность называется отношение силы гидростатического давления, действующей на эту поверхность, к площади поверхности (при условии, что сила распределена по поверхности равномерно).

$$\boxed{p = \frac{F_{\text{гидр. давл.}}}{S}}$$

- поверхность плоская
- давление одинаково во всех точках поверхности

Единица измерения давления в СИ: 1Па = 1 Н/м².

Если сила давления неравномерно распределена по поверхности, то можно вычислить среднее давление или давление в данной точке поверхности

$$\boxed{p = \frac{dF_{\text{гидр. давл.}}}{dS}}$$

Сила гидростатического давления, действующая на бесконечно малую площадку dS

площадь бесконечно малой площадки (эта площадь dS мала на столько, что площадку можно с достаточной точностью считать плоской и изменением давления в пределах dS можно пренебречь)

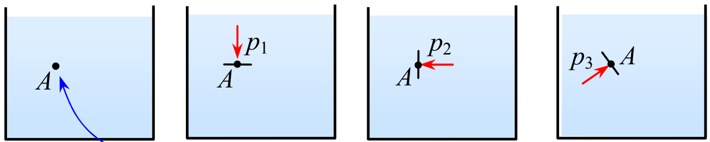
$$\boxed{p_{\text{ср}} = \frac{F_{\text{гидр. давл.}}}{S}}$$

поверхность плоская

$$F_{\substack{\text{давл.}\\ \text{на стенку}}} = p_{\text{ср}} \cdot S = \frac{p_A + p_B}{2} \cdot S$$

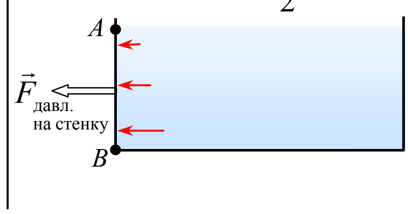
7. Давление в какой-либо точке жидкости — это давление на воображаемую бесконечно малую площадку, на которой лежит эта точка. Причем, можно доказать, что

давление в данной точке жидкости не зависит от ориентации той воображаемой бесконечно малой площадки, на которую производится это давление.



$$\boxed{p_A = p_1 = p_2 = p_3}$$

Давление в точке жидкости A

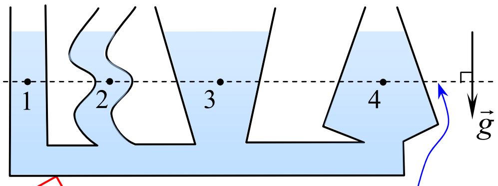


8. В <u>однородной</u> <u>покоящейся</u> жидкости давления в точках, лежащих в одной горизонтальной плоскости (на одном уровне), одинаковы.

жидкость неподвижна относительно стенок сосуда (не течет), а сосуд не имеет ускорения в ИСО

плотность жидкости ρ одинакова во всех ее точках

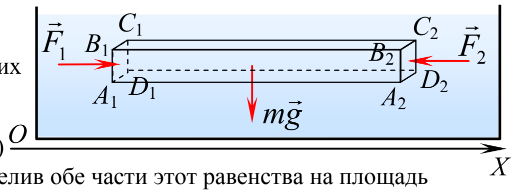
$$\boxed{p_1 = p_2 = p_3 = p_4}$$



<u>Открытая в атмосферу, свободная поверхность жидкости горизонтальна,</u> т. к. во всех ее точках давление одинаково и равно атмосферному.

горизонтальная плоскость — плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{g}$

<u>Док-во:</u> Мысленно выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Площадь $A_1B_1C_1D_1$ так мала, что во всех ее точках давление одинаково. Сторона A_1A_2 горизонтальна. Выделенный объем жидкости находится в равновесии, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю: $m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{бок} = 0$ (Сила $\vec{F}_{бок}$ — сумма сил гидростатического давления на боковые поверхности $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $C_1D_1D_2C_2$, $D_1A_1A_2D_2$.)



В проекциях на горизонтальную ось OX это уравнение имеет вид: $F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$ Разделив обе части этот равенства на площадь $A_1B_1C_1D_1$, получим что давления на площадки $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ равны: $p_1 = p_2$.

9. В <u>однородной</u> <u>покоящейся</u> жидкости давления в точках, лежащих на разных горизонтальных уровнях, отличаются на

$$\boxed{p_н - p_в = \rho g h}$$

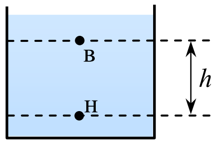
ρ – плотность жидкости

h – расстояние между верхним и нижним уровнями

давление в точке, лежащей на более низком уровне

давление в точке, лежащей на более высоком уровне

g – ускорение свободного падения

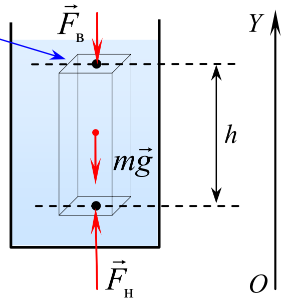


<u>Док-во:</u> Мысленно выделим в жидкости прямоугольный параллелепипед с горизонтальными основаниями. Выделенный объем жидкости находится в равновесии, поэтому сумма всех действующих на него сил равна нулю:

$m\vec{g} + \vec{F}_н + \vec{F}_в + \vec{F}_{бок} = 0$ (Сила $\vec{F}_{бок}$ — сумма сил гидростатического давления на боковые вертикальные поверхности .)

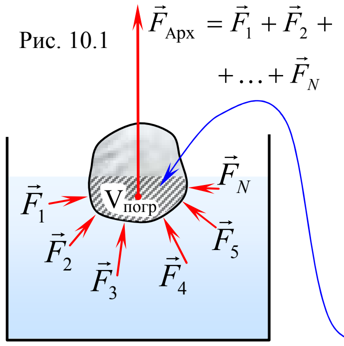
В проекциях на вертикальную ось OY это уравнение имеет вид: $-mg + F_н - F_в = 0 \Rightarrow F_н - F_в = mg = \rho Shg$ (здесь масса выделенного объема жидкости m представлена как произведение ее плотности ρ на объем $V = Sh$

Разделив обе части этот равенства на площадь основания S, получим: $p_н - p_в = \rho gh$.



10. Архимедова сила — выталкивающая (подъемная) сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ. <u>Архимедова сила есть сумма всех сил гидростатического давления</u>, действующих на тело, погруженное в жидкость или газ (кроме тех случаев, когда тело плотно прижато к дну или стенке сосуда так, что жидкость (газ) не проникает между телом и дном (стенкой) — в этих случаях суммарную силу гидростатического давления не называют архимедовой силой)

Рис. 10.1



$$\boxed{F_{АРХ} = m_{выт} \cdot g}$$

ускорение свободного падения

$m_{выт}$ — масса «вытесненной» жидкости — масса такой же жидкости, как вокруг тела, которая уместилась бы в <u>объеме погруженной части тела</u> $V_{погр}$

$$\boxed{F_{АРХ} = \rho_ж \cdot V_{погр} \cdot g}$$

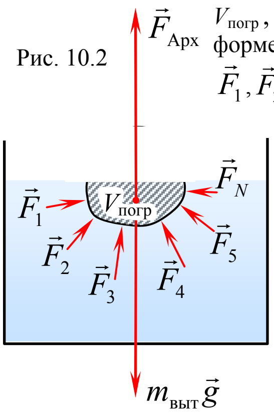
если жидкость однородна

ρ — плотность среды (жидкости или газа), в которую погружено тело

<u>Док-во:</u> Сумма сил гидростатического давления $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \vec{F}_{Арх}$, действующих на объем $V_{погр}$ не зависит от того, какое вещество находится внутри этого объема ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ – силы упругости, они зависят от деформации жидкости, окружающей объем $V_{погр}$, а не от содержимого этого объема). Мысленно выделим в покоящейся жидкости объем, совпадающий с $V_{погр}$ по форме и расположению (рисунок 10.2). На него будут действовать точно такие же силы гидростатического давления $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$, как и на объем погруженной части тела $V_{погр}$. Выделенный в жидкости объем находится в равновесии, значит,

$\vec{F}_{Арх} + m_{выт}\vec{g} = 0 \Rightarrow F_{АРХ} = m_{выт} \cdot g$, что и требовалось доказать.

Рис. 10.2



(В этом доказательстве считается, что атмосферного давления нет. Чтобы учесть его наличие, можно рассматривать тело на рисунке 10.1, как плавающее на границе раздела двух сред – жидкости (ρ_2) и воздуха (ρ_1))

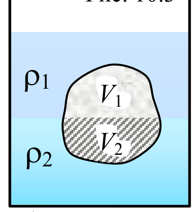
Если тело плавает на границе нескольких сред, плотностями ρ_1, ρ_2, … (На рис. 10.3 пример, когда сред две), то масса вытесненной жидкости $m_{выт}$ находится как сумма $m_{выт} = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \ldots$

(V_1 — объем той части тела, которая погружена в первую среду,

V_2 — объем той части тела, которая погружена во вторую среду, и. т. д.)

Архимедова сила в этом случае равна $F_{АРХ} = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 + \ldots)g$

Рис. 10.3



11. Если сосуд с жидкостью движется с ускорением $\vec{a}$ в ИСО, то в системе отсчета, связанной с сосудом, на каждую точку этой жидкости вместе с силой тяжести $m\vec{g}$ действует сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$. Если жидкость неподвижна относительно сосуда, то в системе отсчета, связанной с движущимся сосудом, можно использовать формулы из пунктов 9 и 10, заменяя в них $\vec{g}$ на $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$.

$$p_2 = p_3$$
$$p_1 - p_2 = \rho g' h$$