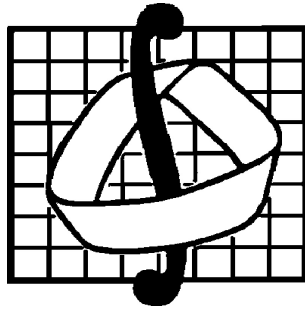


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

Лекционный курс: Методы математической
физики.

В.В. Палин, Е.В. Радкевич

Москва 2016 год

В.В. Палин, Е.В. Радкевич
Лекционный курс: Методы математической физики.

Предлагаемый курс лекций по уравнениям математической физики ориентирован на изучение ряда современных методов теории дифференциальных уравнений. При этом он содержит и основы классического курса уравнений математической физики. Изложение материала сопровождается рассмотрением ряда содержательных примеров, позволяющих проследить логику развития методов изучения задач математической физики.

Рецензенты — д.ф.-м.н., профессор А. С. Шамаев, д.ф.-м.н., доцент
В. Ж. Сакбаев

Оглавление

1	Введение.	9
1.1	Обзор курса первого семестра.	10
1.2	Обзор курса второго семестра.	13
1.3	Один пример.	14
2	Качественные свойства решений ОДУ.	19
2.1	Первые интегралы для ОДУ.	19
2.1.1	Первые интегралы и интегральные кривые.	20
2.1.2	Множество первых интегралов и его свойства.	21
2.2	Первые интегралы автономной системы.	23
3	УрЧП первого порядка и их классические решения.	25
3.1	Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.	25
3.1.1	Линейные уравнения в частных производных первого порядка.	25
3.1.2	Квазилинейные УрЧП первого порядка.	27
3.2	Задача Коши для квазилинейных УрЧП.	31
3.2.1	Теорема существования и единственности решения.	31
3.2.2	Алгоритмы интегрирования задачи Коши для линейного и квазилинейного УрЧП.	32
3.2.3	Обобщение алгоритма A2 на случай произвольной размерности. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса.	33
3.3	Введение в теорию нелинейных УрЧП первого порядка. Огибающие и характеристики.	37
3.3.1	Полные интегралы и огибающие.	37
3.3.2	Примеры и упражнения.	39

3.3.3	Вывод характеристических уравнений. Задача Коши.	41
3.3.4	Вспомогательные утверждения.	42
3.3.5	Локальная теорема существования.	44
3.3.6	Характеристики для законов сохранения. Пересекающиеся характеристики.	46
3.4	Уравнение Гамильтона-Якоби и его классическое решение.	47
3.4.1	Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби.	47
3.4.2	Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби.	49
3.4.3	Вариационное исчисление. Связь с ОДУ Гамильтона.	51
3.4.4	Преобразование Лежандра. Выпуклая двойственность гамильтониана и лагранжиана.	54
3.4.5	Геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона-Якоби. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.	55
3.4.6	Геометрическая оптика.	58
3.5	Коротковолновые асимптотики для УрЧП.	59
3.5.1	Постановка задачи и общая идея метода.	59
3.5.2	Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера.	60
3.5.3	Коротковолновая асимптотика для волнового уравнения.	61
4	Обобщенные решения.	71
4.1	Обобщенные решения задачи Коши для закона сохранения.	71
4.1.1	Интегральное решение. Условие Рэнкина-Гюгонио.	71
4.1.2	Пример неединственности интегрального решения.	75
4.1.3	Энергетические оценки.	76
4.1.4	Допустимые разрывы и условие энтропии.	78
4.1.5	Обобщенное решение по Кружкову.	79
4.2	Введение в теорию обобщенных функций.	82
4.2.1	Пробные функции и их свойства.	82
4.2.2	Определение и основные свойства обобщенных функций.	87
4.2.3	Дифференцирование распределений и умножение на гладкую функцию. Свертка с гладкой функцией.	90
4.2.4	Преобразование Фурье обобщенных функций.	92
4.2.5	Пространства Соболева.	97
4.3	Неравенство Фридрихса.	100
4.4	Теорема Рисса для гильбертовых пространств.	102

4.5	Обобщенная задача Дирихле для уравнения Пуассона.	105
4.6	Коротковолновые асимптотики и функция Грина	106
4.6.1	Напоминание: общая структура метода коротковолновых асимптотик для одномерного уравнения Шредингера.	107
4.6.2	Модельный пример: уравнение Шредингера для гармонического осциллятора.	108
4.6.3	Функция Грина задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором.	109
4.6.4	Вычисление интегралов I^\pm и явный вид функции Грина.	112
4.6.5	Фокальные точки и переход через них с помощью преобразования Фурье.	114
4.6.6	Регуляризация функции Грина.	116
4.6.7	Поведение лагранжева многообразия Λ_t и его связь с индексом.	118
4.6.8	Канонический оператор Маслова в одномерном случае.	119
5	Курсовые работы первого семестра (список задач по построению коротковолновых асимптотик).	121
6	Качественные свойства решений уравнений математической физики.	127
6.1	Волновое уравнение.	127
6.1.1	Модельная задача, приводящая к волновому уравнению ($n = 1$).	128
6.1.2	Представление решения в виде суммы двух волн ($n = 1$).	130
6.1.3	Смешанная задача для $n = 1$. Методы четного и нечетного продолжения.	132
6.1.4	Сферические средние. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.	135
6.1.5	Случай $n = 3$. Формула Кирхгофа. Волновые фронты.	137
6.1.6	$n = 2$. Метод спуска. Формула Пуассона.	139
6.1.7	Неоднородная задача. Принцип Дюамеля.	141
6.1.8	Конус зависимости. Единственность.	142
6.2	Уравнение Лапласа.	143

6.2.1	Основные определения. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3	143
6.2.2	Теоремы о среднем.	147
6.2.3	Свойства гармонических функций.	148
6.2.4	Вариационное исчисление.	150
6.2.5	Случай $n = 3$. Электростатическая интерпретация. .	151
6.2.6	Случай $n = 3$. Функция Грина. Метод отраженных зарядов.	153
6.2.7	Случай $n = 2$. Применение конформных отображений.	154
6.2.8	Представление функции в виде суммы трех потенциалов. Задача Неймана для уравнения Лапласа. . .	155
6.3	Уравнение теплопроводности.	158
6.3.1	Основные определения. Фундаментальное решение. .	158
6.3.2	Неоднородная задача.	161
6.3.3	Теоремы о стабилизации.	164
6.3.4	Сильный принцип максимума в ограниченной области.	170
6.3.5	Принцип максимума в полосе.	173
6.3.6	Гладкость решений.	175
7	Система уравнений Максвелла.	177
7.1	Постановка задачи. Законы сохранения для системы уравнений Максвелла.	177
7.2	Потенциалы. Калибровка Лоренца.	180
7.3	Фундаментальное решение волнового уравнения. Запасывающий потенциал.	182
8	Введение в теорию полугрупп.	185
8.1	Полугруппа и ее инфинитезимальный оператор.	186
8.2	Резольвенты.	190
8.3	Теорема Хилле-Иосиды.	192
8.4	Приложение теории полугрупп к параболическим уравнениям.	194
9	Курсовые работы второго семестра(калибровка Лоренца).	197

10	Дополнительные главы.	205
10.1	Дифференцируемость решения ОДУ по параметру и ее применение.	205
10.1.1	Непрерывность решения ОДУ по параметру.	205
10.1.2	Дифференцируемость решения по параметру.	207
10.1.3	Примеры и упражнения.	209
10.2	Метод стационарной фазы.	210
10.2.1	Геометрическая оптика.	211
10.2.2	Стационарная фаза.	212
10.2.3	Метод стационарной фазы.	218
10.2.4	Оптика и стационарная фаза.	221

Дорогие читатели!

В основу настоящего курса легли курсы лекций по уравнениям с частными производными, прочитанные авторами в течении ряда лет на механико-математическом факультете, и курс лекций по методам математической физики на факультете фундаментальной физико-химической инженерии Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова. Специфика задач образования на факультете фундаментальной физико-химической инженерии привела к необходимости существенно модифицировать лекционный курс. В результате этого основной целью излагаемого курса является изучение современного математического аппарата, используемого для моделирования физических процессов или визуализации их основных свойств.

Авторы благодарны студентам, предоставившим свои конспекты и особую благодарность приносят профессорам С.Ю Доброхотову и В.В. Жикову за обсуждение, полезные советы и предоставленные материалы.

Замечания и предложения мы просим высылать по адресу *grey_stranger84@mail.ru*.

С уважением

В.В. Палин и Е.В. Радкевич

Глава 1

Введение.

Лекционный курс можно структурировать различными способами. Наиболее крупное разделение курса – семестровое, на две части. При этом основная тематика первого семестра (главы 3,4) – уравнения с частными производными первого порядка, в том числе нелинейные, и их приложение к построению коротковолновой асимптотики решений задачи Коши для уравнения Шредингера и волнового уравнения. Тематика второго семестра (главы 6,7) соответствует более классическому курсу уравнений с частными производными второго порядка. Вторая глава содержит материал из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимый для изучения уравнений с частными производными первого порядка. Глава 10 – вспомогательная, в нее отнесены две темы – раздел 10.1 посвящен некоторым методам исследования обыкновенных дифференциальных уравнений (дифференцируемость решения по параметру), а раздел 10.2 содержит описание и некоторые полезные применения метода стационарной фазы.

Наши задачи – изучить аппарат уравнений с частными производными, используемый при описании физических процессов; проиллюстрировать возникновение уравнений с частными производными при описании таких процессов; научиться строить решения полученных уравнений, анализировать их свойства, а также давать физическую интерпретацию полученным результатам.

1.1 Обзор курса первого семестра.

В курсах общей и теоретической физики формируется, как известно, физическое представление о том, что классическая (геометрическая) оптика, классическая механика и классическая термодинамика являются предельными случаями соответственно волновой оптики, квантовой механики и статистической механики.

Математическое обоснование соответствующего предельного перехода отнюдь не тривиально и связано в первую очередь с построением приближенных (асимптотических) решений (псевдо)дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующих всевозможные волновые процессы (стационарные и нестационарные) в сплошных средах.

При определенных условиях на параметры волнового процесса и параметры среды (например, когда длина волны мала по сравнению с размерами рассматриваемых тел системы или по сравнению с параметром неоднородности среды) в первом приближении, которое называют коротковолновым, фаза асимптотики волнового поля удовлетворяет **нелинейному УрЧП первого порядка** – уравнению Гамильтона–Якоби для волновых фронтов. Следующее приближение приводит к **линейному уравнению первого порядка для определения амплитуды колебаний** – уравнению переноса.

Одним из основных достижений математического анализа XIX века состоит в том, что решение уравнения с частными производными (УрЧП) первого порядка можно свести к решению соответствующей этому уравнению характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. С физической точки зрения этот факт есть проявление двойственности при описании волновых процессов: поведение физической системы можно описывать как при помощи волновых фронтов (решений УрЧП) так и при помощи описания траекторий частиц в конфигурационном пространстве системы (решений характеристической системы ОДУ). Траектории частиц могут с течением времени пересекаться, касаться друг друга, собираться в одну точку, образуя множества в конфигурационном пространстве, которые, следуя терминологии геометрической оптики, называют фокальными точками или каустиками (точками поворота в квантовой механике). Оказывается, что при возникновении такого рода особенностей решения соответствующих УрЧП теряют гладкость, у них появляются разрывы для самой функции или ее производных. Этот эффект принято называть катастро-

фами для решений. Задачи, в которых происходят катастрофы решений соответствующих УрЧП, возникают при анализе распространения ударных волн в механике сплошной среды, в частности, в моделях газовой динамики и магнитной гидродинамики; при описании распространения и фокусировки радиоимпульсов в диспергирующих средах; при описании распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли; при изучении дифракции на проводящих телах; а также при анализе распространения лазерного электромагнитного излучения в лабораторной плазме.

В связи со сказанным выше, естественным образом построен курс первого семестра. Во **второй главе** вводится понятие первого интеграла и обсуждаются те разделы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут активно использоваться в дальнейшем изложении.

Темы, посвященные методам исследования обыкновенных дифференциальных уравнений (решения дифференциальных уравнений, зависящих от параметра) отнесены в главу 10. В случае, если эти разделы уже хорошо знакомы, их можно опустить.

Третья глава посвящена классическим решениям уравнений с частными производными первого порядка. С точки зрения структуры третья глава разбита на пять разделов. Раздел 3.1 посвящен связи между линейным (квазилинейным) УрЧП первого порядка и соответствующей ему системой характеристических ОДУ.

Основная задача раздела 3.2 — дать в виде алгоритмов методы решения задачи Коши для линейных и квазилинейных УрЧП. Кроме того, в конце этого раздела приводятся два примера применения описанных алгоритмов к задачам, имеющим физическую природу — интегрирование уравнений неразрывности и переноса. Выбор именно этих уравнений в качестве примеров не случаен и связан с необходимостью интегрировать уравнение переноса при построении коротковолновой асимптотики для уравнения Шредингера и волнового уравнения.

Раздел 3.3 посвящен изучению метода характеристик для интегрирования задачи Коши, соответствующей нелинейному УрЧП первого порядка. В последнем пункте третьей темы также приводится пример задачи Коши для нелинейного УрЧП первого порядка, где возникает катастрофа решения. Этот пример в дальнейшем используется в курсе как мотивационный пример для введения понятия обобщенного решения уравнения с частными производными первого порядка.

Раздел 3.4 посвящен изучению классических решений задачи Ко-

ши для уравнения Гамильтона-Якоби. Обсуждаются алгоритмы интегрирования задачи Коши для стационарного и нестационарного уравнений; связь системы ОДУ Гамильтона с вариационным исчислением; преобразование Лежандра; геометрическая интерпретация решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби. В последнем пункте на эвристическом уровне излагается связь между геометрической оптикой и лагранжевой механикой, а также доказывается принцип Гюйгенса и устанавливается связь между траекториями частиц в фазовом пространстве системы и волновыми фронтами.

Раздел 3.5 содержит описание и некоторые примеры применения метода коротковолновых асимптотик. Оказывается, что при определенных условиях на параметры волнового процесса и параметры среды в первом приближении, которое называют коротковолновым, фаза асимптотики волнового поля – функция $S(t, x)$ – удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби для волновых фронтов, а следующее приближение приводит к УрЧП первого порядка для определения амплитуды колебаний $\phi(t, x)$. В качестве иллюстрации метода производится построение коротковолновых асимптотик для уравнения Шредингера и волнового уравнения. Предполагается, что после изучения этого раздела студенты получают задания для курсовой работы первого семестра.

Четвертая глава посвящена понятию обобщенных решений УрЧП и связанному с ним понятию обобщенных функций. Основная цель этой главы – дать описание математического аппарата обобщенных решений, обобщенных функций и пространств Соболева, который будет активно использоваться в дальнейшем курсе. Как было показано в примере в конце раздела 3.3, для закона сохранения даже для сколь угодно гладких данных Коши может произойти катастрофа решения, т.е. решение потеряет гладкость в некоторый момент времени. Отсюда естественным образом возникает понятие обобщенного решения. Далее в этой теме вводится понятие ударной волны и доказывается условие Рэнкина-Гюгонио; строятся примеры неединственности интегрального решения; обсуждаются дополнительные условия, которые следует наложить на решение для того, чтобы оно стало единственным.

В **четвертой главе** раздел 4.2 – одна из самых технически сложных в курсе и одновременно с этим самая важная для последующих глав. В этой теме вводятся понятия пробной и обобщенной функций. Обсуждаются понятия носителя и носителя сингулярности обобщенной функции, сходимости и дифференцирование обобщенных функций, а также сверт-

ка обобщенной и пробной функций. Тут же разбирается преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста и пространства Соболева. Стоит отметить особую важность этой темы для изучения материала следующей главы. Разделы 4.3 и 4.4 содержат полезные неравенства и теоремы, на которые часто приходится ссылаться в доказательствах теорем типа "существования и единственности" для УрЧП.

В разделе 4.6 описывается метод построения коротковолновой асимптотики функции Грина задачи Коши для одномерного уравнения Шредингера при наличии каустики. Задача этой главы „Посмотреть, что будет за фокальной точкой“? Вначале на модельном уравнении (уравнение Шредингера с гармоническим осциллятором) показывается, каким образом можно построить коротковолновую асимптотику для функции Грина, и каким образом можно осуществить переход через фокальную точку с помощью h -преобразования Фурье. Затем (в последнем параграфе этой главы) описывается метод канонического оператора Маслова для одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $U(x)$ из некоторого специального класса.

В **пятой главе** приведены примеры курсовой работы первого семестра – построение коротковолновых асимптотик для уравнения Шредингера и волнового уравнения.

1.2 Обзор курса второго семестра.

Уравнения математической физики позволяют строить адекватные модели для огромного количества разнообразных по своей природе физических и химических процессов, которые мы можем наблюдать непосредственно или с помощью приборов. Среди таких процессов стоит упомянуть колебания струн и мембран, распространение звуковых и электромагнитных волн, электростатические и электродинамические явления, процессы диффузии и передачи тепла. В связи с таким разнообразием описываемых уравнениями математической физики процессов нет никакой возможности изложить эту область математики во всей полноте в одной книге. Как следствие, при составлении курса второго семестра был выбран ставший уже традиционным подход – показать читателю несколько типичных методов и задач математической физики.

Шестая глава посвящена трем наиболее распространенным в приложениях линейным уравнениям с частными производными второго по-

рядка – волновому уравнению (первая тема), уравнению Лапласа (вторая тема) и уравнению теплопроводности (третья тема). Стоит отметить, что в первой из тем этой главы, в отличие от традиционного изложения, формула Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения получается конструктивно – как следствие из уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. При изложении второго и третьего разделов этой главы активно используется введенный в четвертой главе аппарат обобщенных функций и понятие фундаментального решения.

Седьмая глава посвящена системе уравнений Максвелла. В явном виде выводятся законы сохранения (уравнение неразрывности и закон сохранения энергии); обсуждается калибровочная инвариантность системы уравнений Максвелла и вводится калибровка Лоренца. В последнем параграфе этой главы строится в явном виде фундаментальное решение для волнового уравнения в размерностях 1, 2 и 3, вводится понятие запаздывающего потенциала и доказывается его единственность.

Восьмая глава завершает курс лекций и посвящена введению в теорию полугрупп. В первых двух параграфах этой главы вводятся основные понятия теории полугрупп и доказываются утверждения о свойствах резольвенты генератора сжимающей полугруппы. Третий параграф посвящен теореме Хилле-Иосиды. В четвертом параграфе показывается, как с помощью теории полугрупп получить существование решения для параболического уравнения, и что можно сказать о гладкости этого решения. Это другой подход, отличный от классического 6 главы, для исследования эволюционных уравнений.

В **девятой главе** приведены примеры курсовой работы второго семестра – построение решений задачи Коши для системы Максвелла.

Глава 10 – вспомогательная, в нее отнесены дополнительные главы – первые две темы второй главы, посвященные методам исследования обыкновенных дифференциальных (решения дифференциальных уравнений, зависящих от параметра) и метод стационарной фазы.

1.3 Один пример.

Как мы отмечали выше, одним из основных достижений математического анализа XIX века состоит в том, что решение уравнения с частными производными первого порядка можно свести к решению соответствующей этому уравнению характеристической системы обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому, естественно в начале курса первые темы посвятить разделам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут активно использоваться в дальнейшем изложении.

Но начнем с простого примера: одномерных частиц, движущихся без столкновений (сильно разреженный газ) по прямой R^1 в отсутствие внешних сил. В силу уравнения Ньютона в отсутствие внешних сил ускорение

$$\ddot{x}(t; x_0) = 0, \quad (3.1)$$

вдоль траектории отдельной частицы $x(t; x_0)$, стартующей в начальный момент времени $t = 0$ из точки $x = x_0$. Вопрос-каким в этом случае может быть распределение скоростей?

Пусть гладкая функция $v(x, t)$, $x \in R^1$, $t \geq 0$, – распределение скоростей частиц в момент времени t . Тогда траектория частицы подчиняется уравнению

$$\dot{x}(t; x_0) = v(x(t; x_0), t), \quad t > 0, \quad x|_{t=0} = x_0 \in R^1, \quad (3.2)$$

В силу уравнения Ньютона

$$\ddot{x}(t; x_0) = \partial_t v(x(t; x_0), t) + \dot{x}(t; x_0) \partial_x v(x(t; x_0), t) = 0, \quad t > 0.$$

Отсюда, из (3.2) получим уравнение с частными производными первого порядка для скорости :

$$\begin{aligned} \partial_t v(x, t) + v(x, t) \partial_x v(x, t) &= 0, \\ (x, t) \in R_+^2 = \{(x, t), x \in R^1, t > 0\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

с заданным начальным распределением скорости $v_0(x)$:

$$v(x, t)|_{t=0} = v(x_0, 0) = v_0(x)$$

Теперь посмотрим, всегда ли эта задача имеет гладкое (классическое) решения $v \in C^1(R_+^2)$, непрерывное вплоть до значения $t = 0$. По аналогии с обыкновенными уравнениями такая задача называется задачей Коши для уравнения (3.3) (уравнения Хопфа).

Рассмотрим два начальных распределения $v_0 = \arctg(x)$ и $v_0 = -\arctg(x)$. Для построения решения применим так называемый метод характеристик. В чем он состоит?

1. Из уравнения (3.3) следует, что скорость $v(x, t)$ постоянна вдоль траектории (характеристики) частицы:

$$v(x(t; x_0), t) = v_0(x_0) \Leftrightarrow x(t; x_0)|_{t=0} = x_0, \quad (3.4)$$

(характеристики уравнения (3.3)). Тогда из (3.2) следует что

$$x(t; x_0) = x_0 + v_0(x_0) t. \quad (3.5)$$

2. Теперь рассмотрим любую точку $(x, t) \in R_+^2$. Если через эту точку проходит какая то траектория, т.е. для некоторого x_0 имеем $x = x(t, x_0)$, то в этой точке $v(x, t) = v_0(x_0)$. Таким образом, во всех достижимых точках (x, t) мы однозначно определяем значение скорости $v(x, t)$, если в эту точку приходит **только одна траектория**, т.е. когда $x_0 = x_0(x, t)$ однозначно определяется по точке (x, t) . Множество таких точек будем называть областью определения гладкого решения $\mathcal{O}_s(v_0)$ с заданным начальным условием v_0 . Очевидно, что в этой области уравнение

$$x - x_0 + v_0(x_0) t = 0 \quad (3.6)$$

определяет диффеоморфизм $x_0(x, t) : \mathcal{O}_s(v_0) \rightarrow R^1$, если выполнено условие

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \partial_{x_0} (x_0 + v_0(x_0) t) = 1 + t \partial_{x_0} v_0(x_0) > 0, \quad (3.7)$$

(поскольку $\partial_{x_0} (x_0 + v_0(x_0) t)|_{t=0} = 1 > 0$), тогда по теореме о неявной функции однозначно определяется решение $x_0(x, t)$ уравнения (3.6). Отсюда следует, что гладкое решение

$$v(x, t) = v_0(x_0(x, t)), \quad (x, t) \in \mathcal{O}_s(v_0)$$

Для первого начального распределения $v_0 = \arctg(x)$ имеем $\partial_x v_0 = 1/(1+x^2) > 0, \forall x \in R^1$, следовательно характеристики не пересекаются во всей верхней полуплоскости R_+^2 , тогда решение

$$v(x, t) = \arctg(x_0(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{O}_s^+ = R_+^2.$$

Для второго начального распределения $v_0 = -\arctg(x)$ все характеристики, стартующие из точек отрезка $-1 \leq x \leq 1$, пересекаются в

фокальной точке $\Phi = \{x = 0, t = 1\}$. Неравенство (3.7) справедливо если $t < 1 + x^2$, т.е. в этом случае $\mathcal{O}_s^- = \{(x, t); t < 1 + x^2\}$ и решение

$$v(x, t) = -\operatorname{arctg}(x_0(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathcal{O}_s^-.$$

Таким образом, задача Коши имеет единственное классическое решение в полосе $R_1^2 = \{(x, t), x \in R^1, t \in (0, 1)\}$, до появления фокальной точки. В полосе же $R_T^2 = \{(x, t), x \in R^1, t \in (0, T)\}$, $T > 1$, классического решения **не существует**.

Теперь отметим, что слева и справа точки покоя $x = 0$ скорость возрастает и убывает вверх и вниз по профилю скорости $y = v(x, t)$ соответственно. Тем самым точки убыстряются в направлении точки покоя справа и слева от нее. Со временем профиль скорости становится круче, стремясь к вертикали $x = 0$. Решение стремится к профилю разрывной функции $y = -\mathbf{sign}x$. Поэтому возникает естественный вопрос: что будет за фокальной точкой? Как в этом случае понимать решение?

Какие выводы можно сделать из этого простейшего примера? Как мы уже упоминали выше: траектории частиц могут с течением времени пересекаться, собираться в одну точку, образуя множества в конфигурационном пространстве, в терминологии геометрической оптики—фокальные точки или каустики. Приведенный пример иллюстрирует тот факт, что при возникновении такого рода особенностей решения соответствующих УрЧП теряют гладкость, у них появляются разрывы для самой функции или ее производных, эффект катастрофы для решений.

Мы выделили только часть из универсальных проблем теории уравнений с частными производными, предметом исследования которой, в общем случае, являются физические модели описываемые системами нелинейных уравнений (одним нелинейным уравнением)

$$\begin{aligned} L_j(u_1, \dots, u_N) &\equiv \\ &\equiv F_j(\partial_x^\alpha u_1, |\alpha| \leq m_1, \dots, \partial_x^\alpha u_N, |\alpha| \leq m_N, x, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $j = 1, \dots, N$, $x \in R^n$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Здесь m_k называется порядком системы относительно компоненты u_k решения.

Для однородных распределений \bar{u} -однородных решений $\bar{u} = \bar{u}(t)$, независящих от пространственных переменных x , система (3.8) становятся

системой обыкновенных уравнений(ОДУ)

$$\begin{aligned} L_j(u_1, \dots, u_N) &\equiv \\ &\equiv F_j\left(\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u_1, |\alpha| \leq m_1, \dots, \partial_x^\alpha u_N, |\alpha| \leq m_N, x, t\right) = 0. \end{aligned}$$

На самом деле связь между уравнениями в частных производных физики (уравнениями с распределенными параметрами) и ОДУ не столь формальная, а намного более содержательная. Как мы покажем в дальнейшем, ОДУ описывают главную часть решений уравнений с распределенными параметрами. Впервые с этим утверждением мы столкнулись при исследовании гладких решений уравнения Хопфа, когда по характеристикам-решениям ОДУ (3.4) мы восстанавливали решение уравнения (3.3) вплоть до появления фокальной точки. Поэтому для нас будет существенна теория ОДУ, дающая язык построения коротковолновых асимптотик для уравнений Шредингера, волнового уравнения и, в дальнейшем, для системы Максвелла. В первых лекциях мы коснемся некоторых тем теории обыкновенных дифференциальных уравнений В случае, если эти разделы хорошо знакомы, их можно опустить.

Глава 2

Качественные свойства решений ОДУ.

2.1 Первые интегралы для ОДУ.

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида называется система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

В такой системе число уравнений равно числу искомых функций $x_i(t)$, $i = 1, \dots$. В левой части каждого уравнения системы стоит производная первого порядка от искомых функций, в правых частях производных нет. К таким системам сводятся дифференциальные уравнения n -порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

многие более сложные системы и системы, возникающие в механике, физике и технике (см. А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §5, п. 3).

Для исследования общих свойств такой системы удобно использовать векторные обозначения

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n).$$

Тогда система записывается в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Решение системы есть совокупность n функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ определяемых на некотором интервале (или отрезке) и удовлетворяющих системе. График каждого решения есть линия в $(n + 1)$ - мерном пространстве с координатами t, x_1, \dots, x_n . В каждой ее точке угловые коэффициенты касательной к этой линии равны $f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, система (1.1) определяет поле направлений (направлений с этими угловыми коэффициентами) в конфигурационном пространстве (t, \mathbf{x}) или в той области этого пространства, где определены функции f_1, \dots, f_n , а решение системы изображается фазовой кривой векторного поля, которая в каждой точке касается направления, заданного в этой точке. Система имеет много решений. Поэтому для выделения единственного решения надо задавать помимо системы также начальные данные $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Задача отыскания решения данного уравнения или системы с такими начальными условиями называется начальной задачей или задачей Коши. Перейдем к исследованию свойств решений задачи Коши для таких систем и уравнений.

2.1.1 Первые интегралы и интегральные кривые.

Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.2)$$

$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$. **Определение. Интегральной кривой** системы (1.2) называется график $(t, x(t))$ функции $x(t)$ – решения (1.2).

Определение. Первым интегралом системы (1.2) в области D называется функция $v(t, x) \in C^1$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой проходящей в D интегральной кривой системы (1.2), то есть для любой кривой $\{(t, x(t))\} \subset D$ найдется C такое, что $v(t, x(t)) = C$.

Геометрический смысл первого интеграла описывается следующим утверждением.

Утверждение 1 Пусть $v(t, x)$ – первый интеграл системы (1.2), $\exists i$ такое, что $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$, c – любое из значений, принимаемых в D функцией v . Тогда равенство $v(t, x) = c$ определяет n -мерную поверхность в \mathbb{R}^{n+1} , целиком состоящую из интегральных кривых системы (1.2).

Доказательство. Пусть P – точка на поверхности $v(t, x) = c$. Тогда $v(P) = c$. Проведем через P интегральную кривую $\{(t, x(t))\}$. По определению первого интеграла $v(t, x(t)) = v(P) = c$, т.е. вся эта кривая лежит на той же поверхности. Утверждение доказано.

Требование $v(t, x(t)) = c$ можно переписать в виде уравнения в частных производных: $\frac{dv(t, x(t))}{dt} = 0$, откуда

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = 0,$$

и, используя уравнение (1.2), получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^n f_j(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_j} = 0. \quad (1.3)$$

Заметим также, что знание первого интеграла $v(t, x)$, у которого $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$, позволяет свести систему (1.2) к системе с меньшим числом неизвестных функций: для этого нужно разрешить равенство $v(t, x) = 0$ относительно x_i и подставить полученное $x_i(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ в (1.2).

2.1.2 Множество первых интегралов и его свойства.

Пусть v_1, \dots, v_k – первые интегралы системы (1.2). Возьмем произвольную функцию $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R}^k)$. Нетрудно видеть, что функция $\phi(v_1(t, x), \dots, v_k(t, x))$ также является первым интегралом системы (1.2). Таким образом, множество первых интегралов бесконечно. Опишем структуру этого множества.

Определение. Первые интегралы v_1, \dots, v_k называются **функционально независимыми** в D , если в каждой точке D ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$ равен k .

Замечание 1 Из линейной зависимости следует функциональная, однако, обратное неверно: функции $v_1 = t - x$ и $v_2 = (t - x)^2$ линейно независимы, но функционально зависимы.

Теорема 1 В окрестности любой точки $M = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ области D существует n функционально независимых первых интегралов системы (1.2).

Доказательство. Для любой точки (t_0, c_1, \dots, c_n) существует единственное решение системы (1.2), проходящее через эту точку: $x = \phi(t, c)$, причем $\phi \in C^1$ по c в силу теоремы 14.1.3 (см. Добавленные главы, §14.1.2). Так как $\phi_i(t_0, c) = c_i$, то при $t = t_0$ матрица $(\frac{\partial \phi_i}{\partial c_j})$ единичная. Значит, якобиан системы $x_i = \phi_i(t, c)$ при $t = t_0$ отличен от нуля. Отсюда по теореме о неявных функциях эту систему можно разрешить относительно c в некоторой окрестности M : $c = v(t, x)$. Покажем, что $v_i(t, x)$ – функционально независимые первые интегралы системы (1.2). Действительно, для каждой интегральной кривой $\{(t, x(t))\}$ во всех точках этой кривой числа c_1, \dots, c_n постоянны. Значит, v_i постоянны вдоль интегральных кривых и являются первыми интегралами. Далее, при фиксированном t близком к t_0 системы функций $\phi(t, c)$ и $v(t, x)$ взаимно обратны. Значит, произведение их якобианов равно единице, откуда следует, что $\det(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \neq 0$. Значит, ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$ равен n , что и означает, что функции $v_i(t, x)$ функционально независимы. Теорема доказана.

Теорема 2 Пусть v_1, \dots, v_n – независимые первые интегралы системы (1.2) в области D , точка $M = (t_0, x^0) \in D$, $c_i = v_i(M)$. Тогда решение системы (1.2) с начальными условиями $x(t_0) = x^0$ определяется как неявная функция системой уравнений

$$v_i(t, x) = c_i. \quad (1.4)$$

Доказательство. Система (1.4) для $x_i(t_0) = x_i^0$ верна в точке M , и в этой точке $\det(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \neq 0$, т.к. v_i – функционально независимы. По теореме о неявных функциях систему (1.4) можно разрешить относительно x :

$$x_i = \phi_i(t, c) \quad (1.5)$$

Функции ϕ_i удовлетворяют системе (1.4). С другой стороны, решение (1.2) удовлетворяет (1.4) при $t = t_0$ в силу выбора постоянных c_1, \dots, c_n . Оно удовлетворяет (1.4) и при других t , так как первые интегралы постоянны вдоль решения. В силу единственности неявной функции это решение имеет координаты x_i , совпадающие с (1.5).

Теорема доказана.

Теорема 3 Пусть v_1, \dots, v_n – функционально независимые первые интегралы системы (1.2) в окрестности U точки $M^* = (t_0, x^*)$. Тогда любой первый интеграл w системы (1.2) в некоторой окрестности точки M^* является функцией от v_j , т.е. найдется $F \in C^1$ такая, что $w = F(v)$.

Доказательство. Пусть $M = (t_0, x^0) \in U$, $c_i = v_i(M)$. Тогда, как и в предыдущей теореме, система (1.4) определяет решение (1.5) системы (1.2). Такие решения заполняют окрестность $U_1 \subseteq U$ точки M^* . Вдоль каждого из них $w = \text{const}$, то есть $w(t, \phi(t, c)) = w(t_0, \phi(t_0, c))$. Обозначим $F(c) = w(t_0, \phi(t_0, c))$. Тогда $F \in C^1$. Переходя от c к x в силу (1.5), а затем от x к v в силу (1.4), получаем $w(t, x) = F(v(t, x))$. Теорема доказана.

2.2 Первые интегралы автономной системы.

Система

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.6)$$

где $f \in C^1$, удовлетворяет условиям теоремы 1 и потому в окрестности любой точки имеет n функционально независимых первых интегралов вида $v(t, x)$. Оказывается, что в силу специального вида системы имеет место следующая теорема.

Теорема 4 В окрестности любой неособой точки система (2.6) имеет $n - 1$ функционально независимый первый интеграл вида $v(x)$, т.е. не зависящий от t .

Доказательство. Пусть $B = x^0$ – неособая точка. Тогда найдется i такое, что $f_i(B) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать $f_n(B) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности f существует окрестность U точки B такая, что $f_n(x) \neq 0$ в U . Поделив все уравнения системы (2.6) на n -ное, в области U имеем:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}. \quad (2.7)$$

По теореме 1 эта система в некоторой окрестности точки B имеет $n - 1$ функционально независимых первых интегралов $v_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n - 1$.

1. Эти первые интегралы постоянны вдоль решений системы (2.7), т.е. вдоль траекторий системы (2.6). Значит, они являются первыми интегралами системы (2.6). Независимость v_i для системы (2.7) означает, что ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\dots,n-1}$ равен $n-1$. Отсюда следует, что $v_i(x)$ функционально независимы и для системы (2.6).

Теорема доказана.

Упражнения. 1. Доказать, что если функции v_1, \dots, v_n линейно зависимы, то они функционально зависимы.

2. Найти не зависящий от t первый интеграл системы, эквивалентной уравнению $\ddot{x} + x = 0$. Каков его физический смысл?

Литература:

А.Ф. Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §25

Глава 3

УрЧП первого порядка и их классические решения.

3.1 Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

3.1.1 Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Определение. Линейным однородным уравнением в частных производных (УрЧП) первого порядка называется

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \quad (1.1)$$

где $z = z(x)$ – искомая функция, $a_j(x) \in C^1(D)$ – известные функции, для которых выполнено условие

$$\sum_{j=1}^n a_j^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in D. \quad (1.2)$$

Теорема 5 *Функция $z(x) \in C^1(D)$ является решением (1.1) тогда и только тогда, когда $z(x)$ – не содержащий t первый интеграл системы ОДУ*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x). \quad (1.3)$$

Доказательство. Пусть $z(x)$ – первый интеграл (1.3), тогда для любого решения $x(t)$ системы (1.3) найдется константа c такая, что $z(x(t)) = c$. Переписывая это равенство в виде $\frac{dz(x(t))}{dt} = 0$, получаем, что для $z(x)$ выполнено равенство

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \quad (1.4)$$

откуда и из того, что $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $x(t)$ – решение (1.3) получаем, что для $z(x)$ имеет место (1.1).

Обратно, пусть $z(x)$ – решение (1.1), $x(t)$ – решение (1.3). Тогда в силу (1.1) для функции $z(x(t))$ выполнено (1.4). Отсюда $\frac{dz(x(t))}{dt} = 0$, т.е. найдется константа c такая, что $z(x(t)) = c$. Значит, функция $z(x)$ – не зависящий от t первый интеграл (1.3).

Теорема доказана.

Лемма 1 Пусть $a_1(x) \neq 0$, первые интегралы $v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)$ системы (1.3) функционально независимы в области D . Тогда система (1.3) сводится к

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i(x)}{a_1(x)}, \quad i = 2, \dots, n \quad (1.5)$$

с теми же первыми интегралами.

Доказательство. В точности совпадает с частью доказательства теоремы 4.

Теорема 6 Если $v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)$ – независимые первые интегралы системы (1.3) в области D , то для любого решения $z(x)$ задачи (1.1) в окрестности любой точки $M \in D$ найдется функция $F \in C^1$ такая, что

$$z(x) = F(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)) \quad (1.6)$$

и наоборот: для любой функции $F \in C^1$ формула (1.6) задает решение задачи (1.1).

Доказательство. Если $F \in C^1$, то функция $z(x)$, заданная формулой (1.6) – первый интеграл системы (1.3), не зависящий от t . Следовательно, по теореме 5 функция $z(x)$ – решение (1.1).

Обратно, если $z(x)$ – решение (1.1), то при $a_1(M) \neq 0$ по теореме 5 и лемме 1 функция $z(x)$ – первый интеграл системы (1.5). Значит, по теореме 3 в некоторой окрестности M найдется $F \in C^1$ такая, что имеет место равенство (1.6). Если же $a_1(M) = 0$, то в силу (1.2) найдется k такое, что $a_k(M) \neq 0$, и перенумеровав переменные, можно свести задачу к ситуации $a_1(M) \neq 0$.

Теорема доказана.

3.1.2 Квазилинейные УрЧП первого порядка.

Определение. Квазилинейным называется уравнение вида

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, z) \frac{\partial z}{\partial x_j} = b(x, z), \quad (1.7)$$

где $a_j(x, z) \in C^1(D)$, $b(x, z) \in C^1(D)$ – известные функции, и имеет место аналог соотношения (1.2) – соотношение $\sum_{j=1}^n a_j^2(x, z) \neq 0 \forall (x, z) \in D$.

Определение. Системой характеристик для уравнения (1.7) называется система ОДУ

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x, z), \quad \frac{dz}{dt} = b(x, z). \quad (1.8)$$

Траектории системы (1.8) в пространстве x_1, \dots, x_n, z называются характеристиками уравнения (1.7).

Очевидно, что линейное однородное УрЧП первого порядка является частным случаем квазилинейного УрЧП. Таким образом, систему (1.3) можно назвать системой характеристик для линейного однородного УрЧП (1.1). Кроме того, теоремы 5 и 6 описывают связь между решением УрЧП (1.1) и соответствующей системой характеристик. Получим аналогичную связь для квазилинейного УрЧП (1.7).

Теорема 7 *Поверхность $z = f(x_1, \dots, x_n)$ – решение (1.7) тогда и только тогда, когда эта поверхность состоит из характеристик уравнения (1.7).*

Доказательство. Пусть характеристика $\{(x(t), z(t))\}$ лежит на поверхности $z = f(x)$. Так как характеристика – траектория (1.8), то координаты касательного вектора к ней имеют вид $(a_1(x, z), \dots, a_n(x, z), b(x, z))$. Так как эта характеристика лежит на поверхности, то вектор нормали к поверхности $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1)$ ортогонален касательному вектору к характеристике, то есть, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n a_j(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - b(x, f(x)) = 0.$$

Если через каждую точку поверхности проходит характеристика, то это уравнение выполнено на всей поверхности, а значит, $z = f(x)$ удовлетворяет (1.7).

Обратно, пусть поверхность $P = \{(x, z): z = f(x)\}$ удовлетворяет (1.7), точка $M \in P$. Покажем, что через M проходит характеристика, лежащая на P . В области G – проекции P на x_1, \dots, x_n – рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x}_i = a_i(x, f(x)). \quad (1.9)$$

Через точку x^0 – проекцию M на G – проходит единственное решение этой системы $x(t)$. Линия $L = \{(x(t), f(x(t)))\}$ лежит на поверхности P и проходит через M . Покажем, что L – характеристика. Первым уравнениям системы (1.8) она удовлетворяет в силу (1.9) и равенства $z = f(x)$ на P . Далее,

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^n a_j(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x_j} = b(x, f(x))$$

в силу того, что $z = f(x)$ – решение (1.7). Значит, L удовлетворяет и последнему уравнению (1.8). Следовательно, L – характеристика.

Теорема доказана.

Теорема 8 Если $v(x, z)$ – первый интеграл (1.8) в D , в точке M выполнены равенства $v(M) = c$, $\frac{\partial v}{\partial z}(M) \neq 0$, то равенство $v(x, z) = c$ определяет в окрестности точки M неявную функцию $z = f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1.7).

Доказательство. Так как v – первый интеграл, то

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_j(x, z) \frac{\partial v}{\partial x_j} + b(x, z) \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

Для неявной функции $z(x)$ в окрестности точки M имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial z}},$$

откуда, разделив (1.10) на $-\frac{\partial v}{\partial z}$, получаем, так как $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, что функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению (1.7).

Теорема доказана.

Теорема 9 Пусть $v_1(x, z), \dots, v_n(x, z)$ – функционально независимые первые интегралы системы (1.8). Функция $z(x)$ – решение уравнения (1.7) в окрестности точки M своего графика тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству

$$F(v_1(x, z), \dots, v_n(x, z)) = 0 \quad (1.11)$$

для некоторой функции $F \in C^1$ такой, что $F(M) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(M) \neq 0$.

Доказательство. Функция $F(v_1, \dots, v_n)$ является первым интегралом системы (1.8). При $\frac{\partial F}{\partial z}(M) \neq 0$ равенство (1.11) определяет вблизи точки M неявную функцию $z(x)$, удовлетворяющую (1.7) по теореме 8. Покажем, что для любой функции $z(x)$ – решения (1.7) – найдется $F \in C^1$ такая, что выполнено (1.11). Без ограничения общности можно считать, что $a_1(M) \neq 0$, тогда вблизи точки M характеристики уравнения (1.7) удовлетворяют системе

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i(x, z)}{a_1(x, z)}, \quad \frac{dz}{dx_1} = \frac{b(x, z)}{a_1(x, z)}. \quad (1.12)$$

Пусть $z = f(x) \in C^1$ – решение (1.7), проходящее через точку $M = (x^0, z_0)$. Тогда решение (1.12) с начальными условиями $x_i(x_1^0) = c_i$, $z(x_1^0) = f(x_1^0, c) + q$ обозначим

$$x_i = \phi_i(x_1, c, q), \quad z = \phi_{n+1}(x_1, c, q). \quad (1.13)$$

При $x_1 = x_1^0$, $c_i = x_i^0$, $q = 0$ получаем точку M . В этой точке якобиан

$$\det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial (c, q)} \right) = 1$$

в силу начальных условий. Значит, по теореме о неявной функции системе (1.13) можно разрешить относительно c, q : $c_i = w_i(x, z)$, $q = w_{n+1}(x, z)$. Аналогично доказательству теоремы 1 можно доказать, что $w_i(x, z)$ – первые интегралы системы (1.12). При этом поверхность $z = f(x)$ совпадает с поверхностью $w_{n+1}(x, z) = 0$, так как обе они состоят из характеристик – решений системы (1.12) с начальными условиями $c; q = 0$. По теореме 3 найдется функция $F \in C^1$ такая, что $w_{n+1} = F(v_1, \dots, v_n)$, где v_i – функционально независимые первые интегралы системы (1.12) (они совпадают с первыми интегралами системы (1.8) согласно лемме 1). Покажем, что $\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z} \Big|_{(x,z)=M} \neq 0$. В этой точке, в силу начальных условий, имеем $w_{n+1}(x^0, z) = q = z - f(x^0)$, откуда $\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z} \Big|_{(x,z)=M} = 1 \neq 0$. Теорема доказана.

Замечание 2 Если z входит только в один из первых интегралов системы (1.8), то вместо (1.11) для нахождения $z(x)$ можно использовать уравнение

$$v_n(x, z) = H(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)),$$

где $h \in C^1$ – произвольная функция.

- Упражнения.** 1. Провести подробное доказательство леммы 1.
2. Доказать, что функции $w_i(x, z)$ из доказательства теоремы 9 – первые интегралы системы (1.12).

Литература:

А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §26
„Конспекты лекций по математическим методам физики, “под редакцией В.В. Белова и С.Ю. Доброхотова, Институт им. Курчатова(2007),§1

3.2 Задача Коши для квазилинейных УрЧП.

3.2.1 Теорема существования и единственности решения.

Для простоты формулировок будем рассматривать случай двух независимых переменных.

Определение. Задачей Коши называется задача о нахождении поверхности $z = f(x, y)$, удовлетворяющей уравнению

$$a_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \quad (2.14)$$

и проходящей через линию L , заданную параметрически:

$$x = \phi_1(s), \quad y = \phi_2(s), \quad z = \phi_3(s). \quad (2.15)$$

При этом предполагается, что $a_j \in C^1$, $b \in C^1$, $\phi_j \in C^1$, для функций a_j выполнено условие (1.2).

Идея построения решения задачи Коши (2.14)-(2.15) заключается в том, чтобы провести характеристику через каждую из точек кривой L . Если из этих характеристик удастся составить поверхность $z = f(x, y) \in C^1$, то согласно теореме 7 эта поверхность – искомая.

Теорема 10 Пусть на дуге L_1 линии L , заданной двойным неравенством $s_1 \leq s \leq s_2$, выполнено условие нехарактеристичности

$$\det \begin{pmatrix} a_1(\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s)) & \phi_1'(s) \\ a_2(\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s)) & \phi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.16)$$

Тогда в некоторой окрестности любой точки дуги L_1 существует единственное решение задачи Коши (2.14)-(2.15).

Доказательство. Так как $a_i \in C^1$, $b \in C^1$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, то через любую точку $(\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s))$ дуги L_1 проходит единственная характеристика, задаваемая уравнениями

$$x = \psi_1(t, s), \quad y = \psi_2(t, s), \quad z = \psi_3(t, s). \quad (2.17)$$

Функции (2.17) удовлетворяют системе (1.8) с начальными условиями $\psi_j(0, s) = \phi_j(s)$. Тем самым, формулы (2.17) задают искомую поверхность $z = f(x, y)$ параметрически. Далее, функции $\psi_j \in C^1$ по теореме

о дифференцируемости решения по параметру (теорема 83). Кроме того, уравнения (2.17) имеют место в каждой из точек дуги L_1 , причем $\frac{\partial x}{\partial t} = a_1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = a_2$, и из начальных условий $\frac{\partial \psi_j}{\partial s} = \phi'_j(s)$. Поэтому якобиан

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} & \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \end{pmatrix} \Big|_{L_1} = \det \begin{pmatrix} a_1 & \phi'_1 \\ a_2 & \phi'_2 \end{pmatrix} \Big|_{L_1} \neq 0$$

в силу (2.16). Значит, в окрестности любой точки дуги L_1 первые два уравнения системы (2.17) можно разрешить относительно t, s и получить $t = t(x, y)$, $s = s(x, y) \in C^1$. Подставляя эти выражения в третье уравнение (2.17), получаем $z = \psi_3(t(x, y), s(x, y)) \in C^1$. Существование доказано.

Единственность следует из того, что по теореме 7 любое решение – поверхность, составленная из характеристик, т.е. в параметрическом виде удовлетворяет системе (2.17); вблизи дуги L_1 функции $t(x, y)$ и $s(x, y)$ определяются из этой системы единственным образом, а значит, $z(x, y)$ – тоже.

Теорема доказана.

3.2.2 Алгоритмы интегрирования задачи Коши для линейного и квазилинейного УрЧП.

Важным является тот факт, что доказательство теоремы 10 является конструктивным, т.е. позволяет построить решение задачи Коши (2.14)-(2.15). Тем самым, мы получили следующий алгоритм.

Алгоритм интегрирования задачи Коши для квазилинейного УрЧП с двумя переменными (А1):

1. Выписать систему характеристик и начальные данные для нее:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1(x, y, u), & x|_{t=0} = \phi_1(s), \\ \dot{y} = a_2(x, y, u), & y|_{t=0} = \phi_2(s), \\ \dot{u} = b(x, y, u), & u|_{t=0} = \phi_3(s), \end{cases} \quad s \in [s_1, s_2] \quad (2.18)$$

При этом параметры s_1 и s_2 пока произвольны.

2. Решить систему (2.18), т.е. найти

$$x = \psi_1(t, s), \quad y = \psi_2(t, s), \quad u = \psi_3(t, s).$$

3. Проверить условие разрешимости (2.16), получив тем самым область разрешимости $[s_1, s_2]$.

4. Выразить (t, s) через (x, y) :

$$t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

5. Подставить $u(x, y) = \psi_3(T(x, y), S(x, y))$.

Рассмотрим теперь линейное УрЧП с двумя переменными:

$$a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + b(x, y)u = f(x, y). \quad (2.19)$$

Это уравнение является частным случаем квазилинейного УрЧП (2.14), и, модифицируя алгоритм А1 для того, чтобы решить задачу Коши (2.19), (2.15), получаем следующий алгоритм.

Алгоритм интегрирования задачи Коши для линейного УрЧП с двумя переменными (А2):

1. Выписать систему характеристик и начальные данные для нее:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1(x, y), & x|_{t=0} = \phi_1(s), \\ \dot{y} = a_2(x, y), & y|_{t=0} = \phi_2(s), \end{cases} \quad s \in [s_1, s_2]$$

Эта система является автономной системой первого порядка из двух уравнений, она допускает понижение порядка (переход к $y(x)$). Найти решение этой системы $x = \psi_1(t, s)$, $y = \psi_2(t, s)$. При этом параметры s_1 и s_2 пока не определены.

2. Записать уравнение характеристик для u :

$$\dot{u} = f(\psi_1(t, s), \psi_2(t, s)) - b(\psi_1(t, s), \psi_2(t, s))u, \quad u|_{t=0} = \phi_3(s),$$

и решить его, получив $u = \psi_3(t, s)$.

3. Проверить условие разрешимости (2.16), получив тем самым область разрешимости $[s_1, s_2]$.

4. Выразить (t, s) через (x, y) :

$$t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

5. Подставить $u(x, y) = \psi_3(T(x, y), S(x, y))$.

3.2.3 Обобщение алгоритма А2 на случай произвольной размерности. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса.

Теорема 11 Пусть γ – гладкая гиперповерхность в \mathbb{R}^n , $u_0(x)$ – гладкая функция на γ , $a_j(x), b(x), f(x) \in C^1(D)$, $\gamma \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, векторное поле

$a(x) \neq 0$ во всех точках $x \in D$. Пусть также γ задана параметрически в виде $\gamma = \{X^0(\xi), \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, и выполнено условие нехарактеристичности

$$\det \left(\frac{\partial X^0}{\partial \xi^j}; a(X^0(\xi)) \right) \neq 0.$$

Тогда решение задачи

$$\langle a(x), \nabla_x u \rangle + b(x)u = f(x), \quad u|_\gamma = u_0(x)$$

существует, единственно в некоторой окрестности гиперповерхности γ и находится по алгоритму А2, в котором первый шаг надо заменить на:

1. Выписать $\dot{x} = a(x)$, $x(0) = X^0(\xi)$ и решить эту систему, получив $X = \psi(t, \xi)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 10.

Применим обобщенный алгоритм А2 к задаче Коши для уравнения неразрывности. **Уравнение неразрывности** – уравнение на плотность $\varrho(x, t)$ идеальной сжимаемой жидкости, текущей с заданным полем скоростей $v(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\varrho v) = 0. \quad (2.20)$$

Зададим также начальное распределение плотности

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0(x) \in C^1 \quad (2.21)$$

Проинтегрируем задачу Коши (2.20)-(2.21). Преобразуя (2.20), имеем

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial \varrho}{\partial x_j} + \varrho \operatorname{div}_x v = 0.$$

Значит, задачу Коши (2.20)-(2.21) можно интегрировать по обобщенному алгоритму А2. Для этого заметим сначала, что гиперповерхность γ может быть параметризована естественным образом: $\gamma = \{(\xi, 0), \xi \in \mathbb{R}^3\}$. Применяя обобщенный алгоритм А2, получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = v_j(x, \tau), & x|_{\tau=0} = \xi_j, \\ \dot{t} = 1, & t|_{\tau=0} = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

откуда $t = \tau$. Пусть $x = \psi(\xi, t)$ – решение этой системы, тогда для $\varrho(\xi, \tau)$ уравнение характеристики имеет вид

$$\dot{\varrho}(\psi(\xi, \tau), \tau) + \varrho(\psi(\xi, \tau), \tau)(div_x v)|_{x=\psi(\xi, \tau), t=\tau} = 0, \quad \varrho|_{\tau=0} = \varrho_0(\xi),$$

и его решение

$$\varrho(\psi(\xi, \tau), \tau) = \varrho_0(\xi) \exp\left(-\int_0^\tau (div_x v)|_{x=\psi(\xi, \tau'), t=\tau'} d\tau'\right) \quad (2.23)$$

Далее, разрешая $x = \psi(\xi, \tau)$ относительно ξ , с учетом того, что $t = \tau$, имеем $\xi = S(x, \tau)$. Подставив это в (2.23), имеем

$$\begin{aligned} \varrho(x, t) &= \\ &= \left(\varrho_0(\xi) \exp\left(-\int_0^\tau (div_x v)|_{x=\psi(\xi, \tau'), t=\tau'} d\tau'\right) \right) \Big|_{\xi=S(x, t)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Попробуем упростить эту формулу. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2 (Формула Лиувилля) *Якобиан $J_x(\xi, t) = \det\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j}\right)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dJ_x}{dt} = J_x \cdot (div_x v)|_{x=\psi(\xi, \tau)}$$

Доказательство. Система (2.22) удовлетворяет всем условиям теоремы 83, отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j},$$

и, обозначив $Y = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j} \right)$, имеем

$$\dot{Y} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)_{i, k=1, \dots, 3} Y.$$

Далее, $Y(0) = E$, значит, матрица Y – невырожденная при малых t , т.е. $J_x \neq 0$ и по правилу дифференцирования невырожденной матрицы получаем

$$\frac{dJ_x}{dt} = \det Y \cdot tr(\dot{Y}Y^{-1}),$$

откуда следует утверждение леммы.

Теорема 12 Пусть при $t \in [0, T]$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ верно $J_x \neq 0$. Тогда формулу (2.24) можно переписать в виде

$$\varrho(x, t) = \left(\frac{\varrho_0(\xi)}{J_x(\xi, t)} \right) \Big|_{\xi=S(x,t)}.$$

Доказательство. В силу леммы Лиувилля имеем

$$(\operatorname{div}_x v)|_{x=\psi(\xi,t)} = \frac{\dot{J}_x}{J_x},$$

откуда экспонента в формуле (2.24) имеет вид

$$\exp \left(- \int_0^t \frac{\dot{J}_x}{J_x} d\tau \right) = \exp(-\ln J_x(\xi, t) + \ln J_x(\xi, 0)) = \frac{1}{J_x(\xi, t)},$$

так как $J_x(\xi, 0) = 1$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Уравнение переноса имеет вид

$$\sum_{j=1}^3 v_j(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(x, t)\phi = 0, \quad (2.25)$$

где $v(x, t)$ – потенциальное поле с потенциалом $S(x, t)$: $v(x, t) = \nabla S(x, t)$, а функция $f(x, t) = \frac{1}{2}\Delta S(x, t)$. Зададим начальные условия

$$\phi|_{t=0} = \phi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \quad (2.26)$$

Пусть $X(x^0, t)$ – решение системы характеристик

$$\dot{x} = v(x, t), \quad x|_{t=0} = x^0,$$

и якобиан $J_x = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0} \right) \neq 0$ при $t \in [0, T]$, $x^0(x, t)$ – решение системы $x = X(x^0, t)$.

Теорема 13 Решение задачи Коши (2.25)-(2.26) на отрезке $[0, T]$ задается формулой

$$\phi(x, t) = \frac{\phi_0(x^0)}{\sqrt{J_x(x^0, t)}} \Big|_{x^0=x^0(x,t)}.$$

Доказательство. Пусть $\varrho(x, t) = \phi^2(x, t)$, тогда $\varrho(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \langle \nabla_x \varrho, v(x, t) \rangle + \varrho \Delta S = 0.$$

Так как $v(x, t) = \nabla_x S(x, t)$, то это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\varrho \cdot \operatorname{grad}_x S) = 0.$$

Последнее уравнение – уравнение неразрывности. Отсюда и из теоремы 12 следует доказываемое.

Упражнения. 1. Провести подробное доказательство теоремы 11.

2. Провести подробное доказательство теоремы 13.

Литература:

А.Ф. Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §26 „Конспекты лекций по математическим методам физики, “под редакцией В.В. Белова и С.Ю. Доброхотова, Институт им. Курчатова(2007), §1

3.3 Введение в теорию нелинейных УрЧП первого порядка. Огибающие и характеристики.

3.3.1 Полные интегралы и огибающие.

Пусть $F(p, z, x) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим нелинейное УрЧП первого порядка

$$F(\nabla_x u, u, x) = 0. \quad (3.27)$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и $\forall a \in A$ существует функция $u(x, a)$ – решение (3.27) такое, что $u(x, a) \in C^2$. Обозначим $(D_a u, D_{x_a}^2 u)$ матрицу

$$(D_a u, D_{x_a}^2 u) = \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1 a_1} & \cdots & u_{x_n a_1} \\ u_{a_2} & u_{x_1 a_2} & \cdots & u_{x_n a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{a_n} & u_{x_1 a_n} & \cdots & u_{x_n a_n} \end{pmatrix}.$$

Определение. Функция $u(x, a)$ называется **полным интегралом** уравнения (3.27) в $U \times A$, если

- 1) $u(x, a)$ – решение (3.27) для всех $a \in A$.
 2) $\text{rank}(D_a u, D_{xa}^2 u) = n$ для всех $x \in U, a \in A$.

Замечание 3 Условие 2) в определении означает, что $u(x, a)$ зависит от всех параметров a_1, \dots, a_n , т.е. не существует множества $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ такого, что каждому $a \in A$ соответствует $b \in B$ по закону $u(x, a) = \phi(x, b) \forall x \in U$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует отображение $\psi: A \rightarrow B$, заданное соотношением $u(x, a) = \phi(x, \psi(a))$. Будем считать, что $\psi \in C^1$. Тогда $u_{x_i a_j} = \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{x_i b_k}(x, \psi(a)) \psi_{a_j}^k(a)$. Отсюда видно, что

$$\det(D_{xa}^2 u) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{n-1} \phi_{x_1 b_{k_1}} \phi_{x_2 b_{k_2}} \dots \phi_{x_n b_{k_n}} \det \Psi = 0,$$

где матрица Ψ имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{a_1}^{k_1} & \dots & \psi_{a_n}^{k_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{a_1}^{k_n} & \dots & \psi_{a_n}^{k_n} \end{pmatrix},$$

так как при любом выборе k_j в матрице Ψ есть минимум два одинаковых столбца. Аналогично доказывается, что для всех подматриц матрицы $(D_a u, D_{xa}^2 u)$ размера $n \times n$ их определители равны нулю, откуда следует, что $\text{rank}(D_a u, D_{xa}^2 u) < n$.

Определение. Пусть $u = u(x, a) \in C^1, x \in U \subset \mathbb{R}^n, a \in A \subset \mathbb{R}^m$. Рассмотрим систему алгебраических уравнений на a :

$$\frac{\partial u(x, a)}{\partial a_i} = 0. \quad (3.28)$$

Пусть функция $a = \phi(x) \in C^1$ – решение (3.28). Тогда функция $v(x) = u(x, \phi(x))$ называется **огibaющей** семейства функций $\{u(x, a), a \in A\}$.

Теорема 14 Пусть для всех $a \in A$ функция $u(x, a)$ – решение (3.27), существует $v(x)$ – огibaющая, $v(x) \in C^1$. Тогда $v(x)$ – решение (3.27) и называется **особым интегралом** (3.27).

Доказательство. Положим $v(x) = u(x, \phi(x))$, где $\phi(x)$ – решение системы алгебраических уравнений (3.28). Тогда в силу (3.28) имеем

$$v_{x_i} = u_{x_i}(x, \phi(x)) + \sum_{j=1}^m u_{a_j}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} = u_{x_i}(x, \phi(x)).$$

Отсюда для любого $x \in U$ получаем

$$F(\nabla_x v(x), v(x), x) = F(\nabla_x u(x, \phi(x)), u(x, \phi(x)), x) = 0,$$

так как $u(x, a)$ – решение (3.27) для всех $a \in A$.

Теорема доказана.

Увеличим число решений, которые можно получить из полного интеграла, следующим образом: пусть $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $h \in C^1$, $h: A' \rightarrow \mathbb{R}$, график h лежит в A .

Определение. **Общим интегралом** (зависящим от h) уравнения (3.27) называется огибающая $v(x)$ семейства функций

$$u'(x, a') = u(x, a', h(a'))$$

при условии, что она существует и принадлежит классу C^1 .

Замечание 4 Исходя из полного интеграла, можно построить решение, зависящее от произвольной функции $h \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$.

Замечание 5 Общий интеграл для (3.27) дает не все решения (3.27), если F – не линейная функция.

Доказательство. Рассмотрим $F(p, z, x) = F_1(p, z, x) \cdot F_2(p, z, x)$. Если $u_1(x, a)$ – полный интеграл уравнения $F_1(\nabla_x u, u, x) = 0$, то соответствующий ему общий интеграл является общим интегралом и для F ; однако, при этом „потеряны“ все решения уравнения $F_2(\nabla_x u, u, x) = 0$.

3.3.2 Примеры и упражнения.

Уравнение Клеро. Рассмотрим уравнение

$$\langle x, \nabla u \rangle + f(\nabla u) = u,$$

где f – заданная функция. Полный интеграл для этого уравнения имеет вид $u(x, a) = \langle x, a \rangle + f(a)$. Действительно, $\nabla_x u(x, a) = a$, откуда следует, что $u(x, a)$ – решение $\forall a \in \mathbb{R}^n$; $D_a u(x, a) = x + \nabla f(a)$, $D_{xa}^2 u = E$, а значит, $\text{rank}(D_a u, D_{xa}^2 u) = n$. Пусть $f(a) = \langle a, a \rangle$. Построим соответствующий указанному полному интегралу особый интеграл. Система (3.28) в этом случае имеет вид $x_i + 2a_i = 0$, откуда $a = -\frac{x}{2}$, и функция $v(x) = -\frac{|x|^2}{4}$ – особый интеграл.

Уравнение эйконала. Рассмотрим уравнение

$$|\nabla u| = 1.$$

Соответствующий полный интеграл имеет вид $u(x, a, b) = \langle a, x \rangle + b$, $a \in \partial B(0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$. (Здесь $B(0, 1) = \{a \in \mathbb{R}^n, |a| \leq 1\}$ – шар радиуса 1 с центром в нуле). Пусть $n = 2$. Построим соответствующий указанному полному интегралу особый интеграл. Так как $a \in \partial B(0, 1)$, то $a = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $u(x, a, b) = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha + b$. Положим для простоты $b = h(a) = 0$. Тогда система (3.28) имеет вид

$$-x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha = 0,$$

откуда $\text{tg } \alpha = \frac{x_2}{x_1}$, а значит, функция

$$v(x) = x_1 \cos(\text{arctg } \frac{x_2}{x_1}) + x_2 \sin(\text{arctg } \frac{x_2}{x_1}) = \pm |x|$$

– решение уравнения эйконала при $x \neq 0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби. Рассмотрим уравнение

$$u_t + H(\nabla u) = 0.$$

Полный интеграл для этого уравнения имеет вид

$$u(t, x, a, b) = \langle a, x \rangle + b - tH(a), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Пусть для простоты $H(p) = |p|^2$, $h = 0$, тогда $u'(t, x, a) = \langle a, x \rangle - t|a|^2$, огибающая находится из системы (3.28): $x - 2at = 0$, откуда $a = \frac{x}{2t}$, и огибающая имеет вид $v(x, t) = \frac{|x|^2}{4}$.

Упражнения. 1. Показать, что $u(x, a, b) = \langle a, x \rangle + b$, $a \in \partial B(0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$ – полный интеграл для уравнения эйконала.

2. Показать, что $u(t, x, a, b) = \langle a, x \rangle + b - tH(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ – полный интеграл для уравнения Гамильтона-Якоби.

3.3.3 Вывод характеристических уравнений. Задача Коши.

Попытаемся, как и в квазилинейном случае, свести задачу (3.27) к системе ОДУ. Для этого рассмотрим задачу Коши, соответствующую (3.27):

$$\begin{cases} F(\nabla u, u, x) = 0, x \in U, \\ u|_{\Gamma} = g(x), \end{cases} \quad (3.29)$$

где $\Gamma \subseteq \partial U$, $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, $F \in C^1$. План решения задачи (3.29) следующий: зафиксируем $x \in U$ и попробуем найти кривую, лежащую в U и соединяющую точку x с точкой $x^0 \in \Gamma$, вдоль которой можно было бы вычислить значения функции $u(x)$. Эта кривая и будет характеристикой уравнения (3.27). Кривую будем искать в виде $x(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$, $s \in I \subseteq \mathbb{R}$. Пусть $u(x) \in C^2(U)$ – решение (3.27). Положим $z(s) = u(x(s))$, $p(s) = \nabla_x u(x(s))$. Продифференцировав по s равенства $p_i(s) = u_{x_i}(x(s))$, имеем

$$\dot{p}_i(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x(s)) \cdot \dot{x}_j(s). \quad (3.30)$$

С другой стороны, продифференцировав (3.27) по x_i , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(\nabla u, u, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & + \frac{\partial F}{\partial z}(\nabla u, u, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}(\nabla u, u, x) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Пусть также

$$\dot{x}_j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)). \quad (3.32)$$

Воспользуемся этим и равенством (3.31) для того, чтобы избавиться от вторых производных функции $u(x)$ в (3.30). Получим на кривой $x(s)$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s))p_i(s) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(s) = - & \left(\frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s))p_i(s) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Далее, продифференцировав по s равенство $z(s) = u(x(s))$, имеем

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\dot{x}_j(s),$$

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n p_j(s) \cdot \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)). \quad (3.34)$$

Переписывая (3.32)-(3.34) в векторной форме, получаем

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -\nabla_x F(p, z, x) - \partial_z F(p, z, x)p(s) \\ \dot{z}(s) = \langle \nabla_p F(p, z, x), p \rangle \\ \dot{x}(s) = \nabla_p F(p, z, x) \end{cases}. \quad (3.35)$$

Эта система называется системой характеристических уравнений для уравнения (3.27), а кривая $(x(s), z(s), p(s))$ – характеристикой. Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 15 Пусть функция $u(x) \in C^2(U)$ – решение уравнения (3.27) в области U , $x(s)$ – решение уравнения $\dot{x}(s) = \nabla_p F(p, z, x)$, где $z(s) = u(x(s))$, $p(s) = \nabla_x u(x(s))$. Тогда $p(s)$ и $z(s)$ – решения соответствующих уравнений системы (3.35) для s таких, что $x(s) \in U$.

3.3.4 Вспомогательные утверждения.

Для простоты будем считать, что $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$. Выясним, какой вид должны иметь начальные данные $p(0) = p^0$, $z(0) = z^0$, $x(0) = x^0$ для системы (3.35). Очевидно, что $x^0 \in \Gamma$, $z^0 = g(x^0)$. Для p^0 в силу (3.29) имеем $p_i^0 = g_{x_i}(x^0)$, $i = 1, \dots, n-1$; $F(p^0, z^0, x^0) = 0$.

Определение. Набор (p^0, z^0, x^0) – допустимый, если выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} z^0 &= g(x^0), \quad p_i^0 = g_{x_i}(x^0), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ F(p^0, z^0, x^0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Попытаемся найти функцию $q(y)$ такую, что для всех точек $y \in \Gamma$, близких к x^0 , тройка $(q(y), g(y), y)$ допустима.

Лемма 3 (Нехарактеристические граничные условия.) Пусть тройка (p^0, z^0, x^0) допустима и выполнено условие нехарактеристичности

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0. \quad (3.37)$$

Тогда существует единственное решение $q(y)$ задачи $q_i(y) = g_{x_i}(y)$, $F(q(y), g(y), y) = 0$ для всех $y \in \Gamma$, достаточно близких к x^0 .

Доказательство. Применим теорему о неявной функции к системе уравнений

$$p_i - g_{x_i}(y) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad F(p, g(y), y) = 0.$$

Эта система выполнена при $p_i = p_i^0, y = x^0$. Кроме того, ее якобиан по p равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ F_{p_1} & F_{p_2} & \dots & F_{p_{n-1}} & F_{p_n} \end{vmatrix} = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.$$

Значит, эта система однозначно разрешима относительно $p = q(y)$ в некоторой окрестности точки x^0 .

Лемма доказана.

Замечание 6 Если Γ не плоская вблизи x^0 , то условие (3.37) принимает вид

$$\langle \nabla_p F(p^0, z^0, x^0), \nu(x^0) \rangle \neq 0,$$

где $\nu(x^0)$ – внешняя единичная нормаль к Γ в точке x^0 .

Обозначим $x(y, s)$ решение последнего из уравнений системы (3.35) с начальными условиями $x|_{s=0} = y, z|_{s=0} = g(y), p|_{s=0} = q(y)$.

Лемма 4 (Локальная обратимость.) Пусть выполнены все условия леммы 3. Тогда найдутся такие содержащий ноль промежуток $I \subset \mathbb{R}$, окрестность W точки x^0 в Γ и окрестность V точки x^0 в \mathbb{R}^n , что $\forall x \in V$ существуют единственные $s \in I, y \in W$ такие, что $x = x(y, s)$.

Доказательство. Имеем $x(x^0, 0) = x^0$. По теореме о неявной функции достаточно проверить, что $\det(D_{y,s}x)|_{y=x^0, s=0} \neq 0$. Из равенства $x(y, 0) = y$, т.к. $y \in \Gamma$, имеем при $i \leq n-1$

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(x^0, 0) = \delta_{ij}.$$

Кроме того, из (3.35) следует, что $\partial_s x_j(x^0, 0) = F_{p_j}(p^0, z^0, x^0)$. Отсюда

$$\det(D_{y,s}x)|_{y=x^0, s=0} = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$$

в силу условия (3.37).

Лемма доказана.

3.3.5 Локальная теорема существования.

Теорема 16 Пусть тройка (p^0, z^0, x^0) допустима и выполнено условие нехарактеристичности (3.37). Положим $x(y, s), z(y, s), p(y, s)$ – решение задачи (3.35) с начальными условиями $x|_{s=0} = y, z|_{s=0} = g(y), p|_{s=0} = q(y)$. В силу леммы о локальной обратимости положим $\forall x \in V: s = s(x), y = y(x), u(x) = z(y(x), s(x)), p(x) = p(y(x), s(x))$. Тогда $u(x) \in C^2$ и является решением задачи Коши (3.29).

Доказательство. 1. Решение системы (3.35) с указанными в условии начальными данными локально существует и единственно. В силу леммы 3 это решение – гладкая функция от y, s ; в силу леммы 4 функции $s(x)$ и $y(x)$ – гладкие. Значит, $p(x) \in C^1$.

2. Покажем, что $f(y, s) = F(p(y, s), z(y, s), x(y, s)) = 0$. Действительно, $f(y, 0) = F(q(y), g(y), y) = 0$ в силу условий согласования (3.36) и леммы

3. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \dot{x}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p_j \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} p_j \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0$$

в силу (3.35). Отсюда и из $f(y, 0) = 0$ следует $f(y, s) = 0 \forall s \in I$.

3. В силу леммы 4 и равенства $f(y, s) = 0$ имеем $F(p(x), u(x), x) = 0$. Осталось показать, что $p(x) = \nabla_x u(x)$.

4. Покажем сначала, что для любых $s \in I$, $y \in W$:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial s}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}. \quad (3.39)$$

Равенство (3.38) следует напрямую из второго и третьего уравнений системы (3.35). Для доказательства равенства (3.39) положим

$$r_i(s) = \frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n p_j(y, s) \frac{\partial x_j}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что $r_i(0) = g_{x_i}(y) - q_i(y) = 0$ в силу условий согласования. Кроме того,

$$\dot{r}_i(s) = \frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial s} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i \partial s} \right).$$

Продифференцировав (3.38) по y_i , имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial s} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial s} + p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i \partial s} \right).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial s} - \frac{\partial p_j}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} - \left(-\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right). \end{aligned}$$

Далее, продифференцировав равенство $F(p, z, x) = 0$ по y_i , имеем

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0.$$

Отсюда

$$\dot{r}_i = \frac{\partial F}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} - \frac{\partial z}{\partial y_i} \right) = -\frac{\partial F}{\partial z} r_i(s).$$

Поэтому $r_i(s)$ – решение линейного однородного ОДУ с начальным условием $r_i(0) = 0$. Значит, $r_i(s) = 0$ и равенство (3.39) доказано.

5. Для $j = 1, \dots, n$ с помощью (3.38) и (3.39) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n p_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n p_k \delta_{jk} = p_j, \end{aligned}$$

откуда $p(x) = \nabla_x u(x)$.

Теорема доказана.

3.3.6 Характеристики для законов сохранения. Пересекающиеся характеристики.

Рассмотрим задачу Коши для скалярного закона сохранения

$$u_t + \operatorname{div}_x(\Phi(u)) = 0, \quad u|_{t=0} = g(x) \quad (3.40)$$

в $U = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Положим $y = (x, t)$, $t = x_{n+1}$, тогда закон сохранения принимает вид (3.27), где $F(p, z, x) = p_{n+1} + \sum_{j=1}^n \Phi'_j(z) p_j$. Тогда

$$\nabla_x F = 0, \quad \partial_z F = \sum_{j=1}^n F'_j p_j, \quad \nabla_p F = (\Phi'(z), 1).$$

Очевидно, что условие нехарактеристичности выполнено для всех точек $y^0 \in \Gamma$, $\Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$. Кроме того, из системы характеристик (3.35) имеем

$$\dot{x}_i(s) = \Phi'_i(z(s)), \quad \dot{t} = 1,$$

и можно считать, что $t = s$. Далее,

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n \Phi'_j(z(s))p_j + p_{n+1} = 0$$

в силу (3.40). Таким образом, $z(s) = z^0 = g(x^0)$, откуда $x_i(s) = \Phi'_i(g(x^0))s + x^0$. Значит, спроектированная характеристика $y(s) = (x(s), s)$ – прямая, вдоль которой функция $u(x)$ постоянна. Пусть теперь $h^0 \in \Gamma$ – другая точка, причем $g(h^0) \neq g(x^0)$. Тогда характеристики, выходящие из точек h^0 и x^0 , могут пересечься в некоторый момент времени $t_0 > 0$. Но тогда в точке пересечения мы придем к противоречию, т.к. $u(x)$ должна быть постоянной и различной вдоль этих характеристик. Значит, задача (3.40) в общем случае не имеет гладкого решения, существующего при всех $t > 0$.

Литература:

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §3.1-3.2.4.

3.4 Уравнение Гамильтона-Якоби и его классическое решение.

3.4.1 Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби.

Определение. Нелинейное УрЧП первого порядка вида

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0 \tag{4.41}$$

называется **нестационарным уравнением Гамильтона-Якоби**, а функция $H(p, x) \in C^1$ – **Гамильтонианом**. В этом случае в классической механике принято обозначать неизвестную функцию $u(t, x)$ через $S(t, x)$ и называть функцией действия.

Данные Коши для уравнения (4.41) имеют вид $u|_{t=0} = S_0(x)$, $x \in \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. Проинтегрируем задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla_x u, x) = 0, \\ u|_{t=0} = S_0(x) \end{cases} \tag{4.42}$$

с помощью метода характеристик, рассмотренного в предыдущей теме. Используя принятые ранее обозначения, имеем $F(p, z, x) = p_{n+1} + H(p, x)$, откуда, так как $\nabla_p F = \nabla_p H$ и $\nabla_x F = \nabla_x H$, следует, что система характеристик имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H, \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{p} = -\nabla_x H, \\ \dot{z} = \langle p, \nabla_p H \rangle + p_{n+1}, \end{cases} \quad (4.43)$$

и начальные условия для нее

$$t(0) = 0, \quad x(0) = x^0 \in \Omega_0, \quad p(0) = \nabla_x S_0(x^0), \quad z(0) = S_0(x^0) \quad (4.44)$$

Нетрудно видеть, что такие начальные условия – допустимые, а поверхность $\Gamma = \Omega_0 \times \{t = 0\}$ удовлетворяет условию нехарактеристичности. Кроме того, можно отождествить время t и параметр характеристики s . Отсюда следует, что уравнения на x и p системы (4.43) с начальными условиями из (4.44) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H, & x(0) = x^0, \\ \dot{p} = -\nabla_x H, & p(0) = \nabla_x S_0(x^0), \end{cases} \quad (4.45)$$

Эта система называется системой ОДУ Гамильтона. Пусть $x = X(x^0, t)$, $p = P(x^0, t)$ – ее решение. В силу леммы о локальной обратимости, при малых t существуют функции $x^0(x, t)$ обратные к $x = X(x^0, t)$. Далее, в силу равенства $p_{n+1} + H(p, x) = 0$ последнее из уравнений системы характеристик (4.43) можно переписать в виде $\dot{z} = \langle p, \nabla_p H \rangle - H(p, x)$, откуда

$$\begin{aligned} z(x^0, t) = & \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n P_j(x^0, \tau) H_{p_j}(P(x^0, \tau), X(x^0, \tau)) - \right. \\ & \left. - H(P(x^0, \tau), X(x^0, \tau)) \right) d\tau + S_0(x^0), \end{aligned} \quad (4.46)$$

и, подставляя в (2.35) равенство $x^0 = x^0(x, t)$, получаем решение задачи Коши (4.42): $u(t, x) = z(x^0(x, t), t)$.

Пример. (Движение частицы равномерно и прямолинейно). Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2m} u_x^2 = 0, \\ u|_{t=0} = \frac{\alpha x^2}{2}. \end{cases}$$

В этом случае система ОДУ Гамильтона (4.45) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m}, & x(0) = x^0, \\ \dot{p} = 0, & p(0) = \alpha x^0, \end{cases}$$

и ее решение $P(x^0, t) = \alpha x^0$, $X(x^0, t) = \frac{\alpha x^0}{m}t + x^0$, откуда

$$z(x^0, t) = \int_0^t \left(\alpha x^0 \cdot \frac{\alpha x^0}{m} - \frac{\alpha^2 (x^0)^2}{2m} \right) d\tau + \frac{\alpha (x^0)^2}{2} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2m}t \right) (x^0)^2.$$

Далее, выражая x^0 через x и t , имеем

$$x^0 = \frac{x}{1 + \frac{\alpha t}{m}} = \frac{mx}{m + \alpha t},$$

откуда получаем ответ:

$$u(t, x) = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 + \frac{\alpha t}{m} \right) \frac{m^2 x^2}{(m + \alpha t)^2} = \frac{\alpha m x^2}{2(m + \alpha t)}.$$

Физический смысл: система ОДУ Гамильтона эквивалентна уравнению $m\ddot{x} = 0$ (нет внешних сил), функция Гамильтона равна $H(p) = \frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия в силу $\dot{x} = \frac{p}{m}$.

Упражнения. 1. Каков физический смысл функции $u(t, x)$?

2. Проверить, что начальные условия (4.44) являются допустимыми, а поверхность Γ удовлетворяет условию нехарактеристичности.

3.4.2 Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби.

Определение. Стационарным уравнением Гамильтона-Якоби называется УрЧП

$$H(\nabla_x u, x) = 0,$$

где функция $H(p, x) \in C^1$.

Пусть $\Gamma = \{x(\xi), \xi \in D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\}$ – гладкая гиперповерхность. Поставим задачу Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби следующим образом:

$$\begin{cases} H(\nabla_x u, x) = 0, \\ u|_{\Gamma} = S_0(\xi). \end{cases} \quad (4.47)$$

Предположим, что существует функция $P_0(\xi)$ такая, что тройка $(P_0(\xi), S_0(\xi), x(\xi))$ – допустимая. Тогда система характеристик для задачи (4.47) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H, & x|_{s=0} = x(\xi), \\ \dot{p} = -\nabla_x H, & p|_{s=0} = P_0(\xi). \end{cases} \quad (4.48)$$

При этом, очевидно, $\dot{z} = \langle p, \nabla_p H \rangle$, $z|_{s=0} = S_0(\xi)$. Пусть $x = X(s, \xi)$, $p = P(s, \xi)$ – решение (4.48). Пусть также выполнено условие нехарактеристичности

$$\langle \nabla_p H(P_0(\xi), x(\xi)), \nu(\xi) \rangle \neq 0,$$

где $\nu(\xi)$ – единичная внешняя нормаль к Γ в точке $x(\xi)$. Тогда по лемме о локальной обратимости существуют обратные функции $s = S(x)$, $\xi = K(x)$ к $x = X(s, \xi)$. Отсюда

$$z(s, \xi) = \int_0^s \langle P(\tau, \xi), \nabla_p H(P(\tau, \xi), X(\tau, \xi)) \rangle d\tau + S_0(\xi),$$

и решение задачи (4.47) имеет вид

$$u(x) = z(S(x), K(x)).$$

Пример (Уравнение эйконала в случае размерности 2).
Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} |\nabla u| = 1, \\ u|_{x_1^2 + x_2^2 = 1} = 0. \end{cases}$$

В этом случае естественная параметризация начальной гиперповерхности Γ имеет вид $\Gamma = \{(\cos \xi, \sin \xi), \xi \in [0, 2\pi)\}$. Найдем $P_0(\xi)$ так, чтобы тройка $(P_0(\xi), 0, x(\xi))$ была допустимой. Для этого запишем условия согласования (3.36):

$$|P_0(\xi)| = 1, \quad dS_0(\xi) = 0 = \langle P_0(\xi), dx(\xi) \rangle.$$

Отсюда в силу первого уравнения имеем $P_0(\xi) = (\cos \theta(\xi), \sin \theta(\xi))$, и в силу второго уравнения получаем

$$-\cos \theta \sin \xi + \sin \theta \cos \xi = 0,$$

т.е. $\sin(\theta(\xi) - \xi) = 0$, откуда $\theta(\xi) = \xi$ или $\theta(\xi) = \pi + \xi$. Тем самым, можно выбрать два различных допустимых вектора $P_0(\xi)$, т.е. решение исходной задачи Коши не единственно. Пусть $\theta(\xi) = \xi$, тогда $P_0(\xi) = (\cos \xi, \sin \xi)$, и система (4.48) имеет вид

$$\dot{x}_1 = 2p_1, \quad \dot{x}_2 = 2p_2, \quad \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = 0,$$

откуда $x_1 = (1 + 2s) \cos \xi$, $x_2 = (1 + 2s) \sin \xi$, $p_1(\xi) = \cos \xi$, $p_2(\xi) = \sin \xi$,

$$z(s, \xi) = \int_0^s (p_1(\xi) \cdot 2p_1(\xi) + p_2(\xi) \cdot 2p_2(\xi)) d\tau + 0 = 2s.$$

Далее, так как $(1 + 2s)^2 = x_1^2 + x_2^2$, то решение исходной задачи обязано иметь вид $u(x) = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1$. Очевидно, что знак „минус“ не удовлетворяет начальному условию, откуда получаем ответ: $u(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1$.

Упражнение. Проинтегрировать уравнение эйконала для случая $\theta(\xi) = \pi + \xi$.

3.4.3 Вариационное исчисление. Связь с ОДУ Гамильтона.

Введем несколько новых понятий:

Определение Лагранжианом назовем функцию $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L = L(q, x) \in C^1$. Зафиксируем точки $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. **Функционалом действия** называется

$$I(w(\cdot)) = \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s)) ds.$$

При этом считается, что функция $w(s)$ принадлежит допустимому классу

$$\mathcal{A} = \{w(\cdot) \in C^2([0, t]), w: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n, w(0) = w_1, w(t) = w_2\}.$$

Задача вариационного исчисления состоит в нахождении кривой $x(s) \in \mathcal{A}$ такой, что

$$I(x(\cdot)) = \min_{w(\cdot) \in \mathcal{A}} I(w(\cdot)) \quad (4.49)$$

Теорема 17 (уравнения Эйлера-Лагранжа) Пусть $x(s)$ – решение (4.49) – существует. Тогда $x(s)$ – решение системы уравнений Эйлера-Лагранжа

$$-\frac{d}{ds}(\nabla_q L(\dot{x}(s), x(s))) + \nabla_x L(\dot{x}(s), x(s)) = 0. \quad (4.50)$$

Доказательство. Выберем функцию $v \in C^2([0, t])$ такую, что $v: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v(0) = v(t) = 0$. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. Положим $w(s, \tau) = x(s) + \tau v(s)$. Тогда $w(\cdot, \tau) \in \mathcal{A}$ для всех τ , откуда $I(x(\cdot)) \leq I(w(\cdot, \tau))$ в силу того, что $x(s)$ – решение (4.49). Обозначим $f(\tau) = I(w(\cdot, \tau))$. Тогда из вышесказанного следует, что функция $f(\tau)$ имеет минимум в точке $\tau = 0$. Значит, $f'(0) = 0$. Вычисляя эту производную явно, имеем

$$f'(\tau) = \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{x} + \tau \dot{v}, x + \tau v) \dot{v}_j + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\dot{x} + \tau \dot{v}, x + \tau v) v_j \right) ds.$$

Используя равенство $v(0) = v(t) = 0$ и интегрируя по частям первое слагаемое, в силу равенства $f'(0) = 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \left(-\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{x}, x) \right) + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\dot{x}, x) \right) v_j ds = 0.$$

Так как это равенство выполнено для всех гладких функций $v(s)$, удовлетворяющих граничным условиям, то отсюда следует, что

$$-\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{x}, x) \right) + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\dot{x}, x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

и, переписывая это в векторной форме, получаем (4.50).

Теорема доказана.

Покажем, что система ОДУ второго порядка (4.50) преобразуется к системе ОДУ Гамильтона. Пусть $x(s)$ – решение (4.50). Положим $p(s) = \nabla_q L(\dot{x}(s), x(s))$ – обобщенный момент, соответствующий координате $x(s)$ и скорости $\dot{x}(s)$. Потребуем, чтобы было выполнено следующее условие.

Условие 1 (Условие разрешимости.) Пусть $\forall x, p \in \mathbb{R}^n$ уравнение $p = \nabla_q L(q, x)$ однозначно разрешимо относительно q как гладкой функции p, x .

Определение. Гамильтониан H , ассоциированный с лагранжианом L – это функция $H(p, x) = \langle p, q(p, x) \rangle - L(q(p, x), x)$.

Теорема 18 *Функции $x(s)$ и $p(s)$ удовлетворяют системе ОДУ Гамильтона (4.45). Кроме того, функция $H(p, x)$ – первый интеграл этой системы.*

Доказательство. Так как $p(s) = \nabla_q L(\dot{x}(s), x(s))$ и выполнено условие разрешимости, то $\dot{x}(s) = q(p(s), x(s))$. Далее,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \left(p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i}(p, x) \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(q, x).$$

В силу условия разрешимости имеем $p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}(q(p, x), x)$. Значит, сумма в предыдущем равенстве состоит из нулевых слагаемых. Следовательно, $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(q, x)$. Аналогично,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i(p, x) + \sum_{k=1}^n \left(p_k \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \right) = q_i(p, x).$$

Таким образом, $\frac{\partial H}{\partial p_i}(p(s), x(s)) = q_i(p(s), x(s)) = \dot{x}_i(s)$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i}(p(s), x(s)) &= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(q(p(s), x(s)), x(s)) = \\ &= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\dot{x}(s), x(s)) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}(\dot{x}(s), x(s)) \right) = -\dot{p}_i(s). \end{aligned}$$

Таким образом, функции $p(s), x(s)$ удовлетворяют (4.45). Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} H(p(s), x(s)) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $H(p, x)$ – первый интеграл системы (4.45).

Теорема доказана.

Упражнения. 1. Обосновать дифференцируемость функции $f(\tau)$, определенной в доказательстве теоремы 17. 2. Решить вариационную задачу для $L(q, x) = \frac{m}{2} q^2 + U(x)$.

3.4.4 Преобразование Лежандра. Выпуклая двойственность гамильтониана и лагранжиана.

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. $\forall \tau \in (0, 1) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $f(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau f(x) + (1 - \tau)f(y)$.

Определение. Преобразованием Лежандра выпуклой функции $f(x)$ называется $g(p) = \max_x F(p, x)$, где $F(p, x) = \langle p, x \rangle - f(x)$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема, то $F(p, x)$ дифференцируема по x . Положим $x^* = x(p)$ – аргумент, при котором $F(p, x)$ максимальна. Тогда $\nabla_x F(p, x^*) = 0$, откуда $p = \nabla_x f(x^*)$, и, если такое x^* существует, то выполнено условие разрешимости, а именно, уравнение $p = \nabla_x f(x)$ разрешимо относительно x . Поэтому $g(p) = f^*(p) = \langle p, x(p) \rangle - f(x(p))$, и при этом $p = \nabla_x f(x(p))$. Таким образом, гамильтониан $H(p, x)$ является преобразованием Лежандра по q для лагранжиана $L(q, x)$ в силу определений из предыдущего пункта. Для простоты изложения будем далее опускать зависимость от x в H и L , т.е. писать $H = H(p)$, $L = L(q)$.

Теорема 19 (Выпуклая двойственность.) Пусть отображение $L(q)$ выпуклое. Тогда $H(p) = L^*(p)$ также выпуклое, и $H^*(q) = L(q)$.

Доказательство. Пусть q фиксировано. Тогда функция $\langle p, q \rangle - L(q)$ линейна, и для $p, \hat{p} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in (0, 1)$ в силу определения преобразования Лежандра имеем

$$\begin{aligned} H(p) &= L^*(p) = \langle p, q(p) \rangle - L(q(p)), \\ H(\tau p + (1 - \tau)\hat{p}) &= \sup_q \{ \langle \tau p + (1 - \tau)\hat{p}, q \rangle - L(q) \} \leq \\ &\leq \tau \sup_q \{ \langle p, q \rangle - L(q) \} + (1 - \tau) \sup_q \{ \langle \hat{p}, q \rangle - L(q) \} = \\ &= \tau H(p) + (1 - \tau)H(\hat{p}). \end{aligned}$$

Значит, по определению, функция $H(p)$ выпукла.

Далее, в силу определения, $H(p) = L^*(p) = \langle p, q(p) \rangle - L(q(p)) \geq \langle p, q \rangle - L(q) \forall p, q \in \mathbb{R}^n$, откуда

$$L(q) \geq \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, q \rangle - H(p) \} = H^*(q).$$

С другой стороны,

$$H^*(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{ \langle p, q \rangle - \sup_r \{ \langle p, r \rangle - L(r) \} \},$$

$$H^*(q) = \sup_p \inf_r \{ \langle p, q - r \rangle + L(r) \}. \quad (4.51)$$

Так как отображение $L(q)$ выпукло, то для любого $q \in \mathbb{R}^n$ найдется $s \in \mathbb{R}^n$ такое, что для любого $r \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$L(r) \geq L(q) + \langle s, r - q \rangle. \quad (4.52)$$

Далее, полагая $p = s$ в (4.51), получаем $H^*(q) \geq \inf_r \{ \langle s, q - r \rangle + L(r) \} = L(q)$, откуда и из доказанного ранее неравенства $H^*(q) \leq L(q)$ следует, что $H^*(q) = L(q)$.

Теорема доказана.

Функции $f(x)$ и $f^*(p)$ называются сопряженными по Юнгу.

Упражнения. 1. Доказать неравенство Юнга: $\langle p, x \rangle \leq f(x) + f^*(p)$.

2. Пусть $f(x) = \frac{|x|^r}{r}$, $r > 1$. Доказать, что $f^*(p) = \frac{|p|^s}{s}$, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

3. Доказать, что если $L(q)$ – дифференцируемое выпуклое отображение, то для любого $q \in \mathbb{R}^n$ найдется $s \in \mathbb{R}^n$, такое, что $\forall r \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство (4.52).

3.4.5 Геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона-Якоби. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

Рассмотрим фазовое пространство $\mathbb{R}_{x,p}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и задачу Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\nabla_x S, x) = 0, \quad S|_{t=0} = S_0(x), \quad x \in \Omega_0. \quad (4.53)$$

Решению задачи (4.53) – функции $S(x, t)$ – сопоставим в фазовом пространстве поверхность

$$\Lambda_t = \{ (x, p), \quad x = X(x^0, t), \quad p = P(x^0, t), \quad x^0 \in \Omega_0 \},$$

где $X(x^0, t)$ и $P(x^0, t)$ – решения системы ОДУ Гамильтона с начальными условиями $X|_{t=0} = x^0$, $P|_{t=0} = \nabla S(x^0)$. Изучим сначала свойства поверхности Λ_0 . Пусть $a, b \in \Lambda_0$, γ – произвольный путь по Λ_0 из a в b . Заметим, что

$$\int_{\gamma(a \rightarrow b)} p dx = \int_{\gamma(a \rightarrow b)} \nabla S_0(x) dx = \int_a^b dS_0 = S_0(b) - S_0(a),$$

т.е. этот интеграл не зависит от выбора пути γ . Заметим, что это свойство эквивалентно тому, что для любого замкнутого пути $\gamma \subset \Lambda_0$ верно равенство $\oint_{\gamma} p dx = 0$.

Определение. Гладкая поверхность Λ размерности n в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ называется **лагранжевой поверхностью**, если для любого замкнутого пути γ по этой поверхности, стягиваемого в точку, верно $\oint_{\gamma} p dx = 0$.

Если теперь рассмотреть поверхность Λ_t , то оказывается, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2 *Поверхность Λ_t – лагранжева при малых t .*

Доказательство. В силу нехарактеристичности поверхности $\Gamma = \{t = 0\}$ и допустимости начальных условий уравнения $x = X(x^0, t)$ локально разрешимы относительно x^0 по лемме о локальной обратимости, т.е. $x^0 = \chi(x, t)$. Значит, Λ_t при фиксированном t является графиком зависящей от x функции $P(\chi(x, t), t)$. В силу теоремы 16, $P(x, t) = \nabla_x S(x, t)$. Отсюда, как и для Λ_0 , получаем лагранжевость поверхности Λ_t .

Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь расширенное фазовое пространство \mathbb{R}^{2n+2} с координатами (x, t, p, p_{n+1}) . Определим „расширение“ поверхности Λ_t следующим образом:

$$\Lambda_{[0,T]}^{n+1} = \{(x, t, p, p_{n+1}), x = X(x^0, t), p = P(x^0, t),$$

$$p_{n+1} = -H(x, t, p), x^0 \in \Omega_0, t \in [0, T]\}.$$

Утверждение 3 *Поверхность $\Lambda_{[0,T]}^{n+1}$ – лагранжева.*

Доказательство. Пусть a, b – две точки на поверхности $\Lambda_{[0,T]}^{n+1}$, $l(a \rightarrow b)$ – произвольный путь из a в b по поверхности. Тогда

$$\begin{aligned} \int_l p dx + p_{n+1} dt &= \int_l p dx - H dt = \int_l \langle \nabla S, dx \rangle - H dt = \\ &= \int_l \langle \nabla S, dx \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} dt = \int_a^b d_{x,t} S = S(b) - S(a), \end{aligned}$$

откуда следует доказываемое.

Следствие 1 Пусть γ_1 и γ_2 – две кривые, охватывающие одну и ту же трубку фазовых траекторий системы ОДУ Гамильтона. Тогда

$$\oint_{\gamma_1} p dx - H dt = \oint_{\gamma_2} p dx - H dt.$$

Определение. Дифференциальная форма $p dx - H dt$ называется интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.

Заметим, что свойство лагранжевости поверхности Λ можно переформулировать так: пусть $\Lambda = \{(x(\alpha), p(\alpha)), \alpha \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\}$. Тогда Λ – лагранжева, если для любых i, j имеет место равенство

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial p}{\partial \alpha_i} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial p}{\partial \alpha_j} \right\rangle = 0. \quad (4.54)$$

Выражение в левой части (4.54) называется скобкой Лагранжа функций $x(\alpha), p(\alpha)$ по переменным α_i, α_j .

Утверждение 4 Если все скобки Лагранжа равны нулю во всех точках поверхности Λ , то поверхность Λ – лагранжева.

Доказательство. Пусть $\gamma \subset \Lambda$ – замкнутый путь, стягиваемый в точку. Тогда по формуле Стокса имеем

$$\oint_{\gamma} p dx = \int_{Int \gamma} dp \wedge dx = \int_{Int \gamma} \sum_{k=1}^n dp_k(\alpha) \wedge dx_k(\alpha) = 0$$

в силу (4.54) и того, что

$$dp_k \wedge dx_k = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \right) d\alpha_i d\alpha_j.$$

Утверждение доказано.

3.4.6 Геометрическая оптика.

Цель этого пункта – построить аналогию между различными понятиями геометрической оптики и гамильтоновой механики. Известно, что в геометрической оптике имеет место принцип Ферма: свет распространяется из точки x_0 в точку x_1 за кратчайшее время. Будем считать, что скорость света при этом зависит как от точки x_0 (неоднородная среда), так и от направления луча (неизотропная среда). Пусть x_0 – фиксированная точка, $t > 0$. Обозначим $\Phi(x_0, t)$ множество точек, до которых свет из точки x_0 может прийти за время, не превосходящее t . Граница множества $\Phi(x_0, t)$ – множество $\partial\Phi(x_0, t)$ – называется волновым фронтом, соответствующим точке x_0 и моменту времени t .

Теорема 20 (Принцип Гюйгенса.) Пусть $x \in \partial\Phi(x_0, t)$. Построим волновой фронт $\partial\Phi(x, s)$ через время $s > 0$. Тогда $\partial\Phi(x_0, t + s)$ – огибающая семейства фронтов $\partial\Phi(x, s)$, соответствующих всем точкам $x \in \partial\Phi(x_0, t)$.

Доказательство. Пусть $x_{t+s} \in \partial\Phi(x_0, t + s)$. Тогда существует путь $l(x_0 \rightarrow x_{t+s})$, который свет проходит за время $t + s$, и нет более короткого пути. Рассмотрим точку $x_t \in l(x_0 \rightarrow x_{t+s})$, до которой свет из x_0 доходит за время t . Более короткого пути из x_0 в x_t нет, иначе путь $l(x_0 \rightarrow x_{t+s})$ – не кратчайший. Следовательно, $x_t \in \partial\Phi(x_0, t)$. Аналогично, $x_{t+s} \in \partial\Phi(x_t, s)$. Покажем, что $\partial\Phi(x_0, t + s)$ и $\partial\Phi(x_t, s)$ касаются в точке x_{t+s} . Действительно, иначе нашлась бы точка $y \in \partial\Phi(x_0, t + s)$ такая, что она лежит строго внутри $\Phi(x_t, s)$. Но тогда в точку y можно добраться за время меньшее, чем $t + s$, т.е. $y \notin \partial\Phi(x_0, t + s)$. Противоречие.

Теорема доказана.

Из принципа Гюйгенса следует, что распространение света можно описывать, описывая лучи (и их направление – скорость \dot{x}), а можно – описывая волновые фронты.

Определение. Оптической длиной пути от точки x_0 до x назовем $S(x_0, x)$ – наименьшее время распространения света от точки x_0 до точки x . Тогда $\partial\Phi(x_0, t) = \{x: S(x_0, x) = t\}$. Вектор нормали к фронту $p = \nabla_x S(x_0, x)$ назовем вектором нормальной медлительности фронта.

Из вышесказанного следует аналогия между геометрической оптикой и гамильтоновой механикой:

принципу Ферма в оптике соответствует вариационный принцип Гамильтона $\int L dt \rightarrow \min$ в механике;
 лучам соответствуют траектории материальных точек $x(t)$;
 свойства среды в механике описываются лагранжианом L ;
 вектору нормальной медлительности фронта соответствует обобщенный импульс;
 выражение нормальной медлительности фронта через скорость луча в оптике соответствует преобразованию Лежандра;
 интегральному инварианту $\langle p, dx \rangle = dS$ соответствует интегральный инвариант Пуанкаре-Картана;
 оптической длине пути из x_0 в x соответствует функция действия $S(x, t)$;
 принципу Гюйгенса, описывающему волновые фронты, соответствует уравнение Гамильтона-Якоби на функцию действия.

Литература.

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §3.3.1
 „Конспекты лекций по математическим методам физики, “под редакцией В.В. Белова и С.Ю. Доброхотова, Институт им. Курчатова(2007), §4-§6
 В.И. Арнольд, „Математические методы классической механики“

3.5 Коротковолновые асимптотики для Ур-ЧП.

3.5.1 Постановка задачи и общая идея метода.

Рассмотрим уравнение математической физики

$$\Phi(u, x, t, \nabla_x u, u_t, D_{x,t}^2 u, h) = 0, \quad (5.55)$$

описывающее какой-либо имеющий волновую природу процесс; h – малый параметр. Решить такое уравнение *точно* – даже при малых t – задача весьма непростая. Идея метода коротковолновых асимптотик состоит в том, чтобы найти функцию $\hat{u}(x, t, h)$ – приближенное решение (5.55) при малых t такое, что

$$\Phi(\hat{u}, x, t, \nabla_x \hat{u}, \hat{u}_t, D_{x,t}^2 \hat{u}, h) = O(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

При этом используется следующее предположение: так как уравнение (5.55) описывает волновой процесс, то локально в каждой точке в фик-

сированный момент времени t решение – синусоидальная волна, однако, амплитуда этой волны и ее направление фронта зависят и от точки, и от момента времени. Тем самым, $\hat{u}(x, t, h)$ ищется в виде

$$\hat{u}(x, t, h) = \phi(x, t) \exp\left(\frac{i}{h} S(x, t)\right). \quad (5.56)$$

При этом предполагается, что начальные данные для амплитуды $\phi(x, t)$ – функцию $\phi_0(x)$ и для фазы $S(x, t)$ – функцию $S_0(x)$ можно найти из физических соображений. Далее приближенное решение вида (5.56) необходимо формально подставить в (5.55) и приравнять к нулю коэффициенты при двух наиболее медленно стремящихся к нулю степенях h (обычно h^0 и h^1). Полученные уравнения на амплитуду ϕ и фазу S будут УрЧП первого порядка, которые можно решить с помощью рассмотренных в предыдущих параграфах методов. Строгого обоснования метода коротковолновых асимптотик мы приводить не будем, но рассмотрим подробно несколько примеров. Метод позволяет строить решения при малых $t < T_0$. При исследовании моментов времени $t > T_0$ даже при сколь угодно гладких $\phi_0(x)$ и $S_0(x)$ у построенных решений \hat{u} могут возникать разрывы, т.е. построенная в предыдущих параграфах классическая теория становится неприменима.

3.5.2 Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера.

Рассмотрим уравнение Шредингера с потенциалом $U(x)$:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + U(x) \psi. \quad (5.57)$$

Для подстановки $\hat{u}(x, t, h)$ вида (5.56) в (5.57) сделаем сначала вспомогательное вычисление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \hat{u} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} e^{\frac{i}{h} S} + \frac{i}{h} \frac{\partial S}{\partial x_k} \cdot \phi e^{\frac{i}{h} S} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \hat{u} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2} e^{\frac{i}{h} S} + \frac{2i}{h} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial S}{\partial x_k} e^{\frac{i}{h} S} + \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$+ \frac{i}{h} \frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2} \cdot \phi e^{\frac{i}{h} S} - \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_k} \right)^2 \phi e^{\frac{i}{h} S}.$$

Подставляя \hat{u} вида (5.56) в (5.57) и используя (5.58), получаем: при h^0 :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \langle \nabla_x S, \nabla_x S \rangle + U(x) = 0, \quad S|_{t=0} = S_0(x). \quad (5.59)$$

Задача (5.59) – задача Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом $H(p, x) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle + U(x)$. Задачи такого типа мы подробно исследовали в разделе 3.4.1.

При h^1 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \langle \nabla_x \phi, \nabla_x S \rangle + \frac{1}{2} \Delta S \cdot \phi = 0, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0(x).$$

Это задача Коши для уравнения переноса, которая была подробно разобрана в качестве примера в разделе 3.2.3. Вспоминая, как именно в явном виде интегрируется уравнение переноса, имеем

$$\phi(x, t) = \frac{\phi_0(x^0)}{\sqrt{J_x(X^0, t)}} \Big|_{x^0=x^0(x, t)},$$

где $J_x(x^0, t) = \det\left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j}\right)|_{(x^0, t)}$, $x = X(\xi, t)$ – решение $\dot{x} = v$, $x(0) = \xi$, и функция $v(x, t) = \nabla_x S(x, t)$. Таким образом, проинтегрировав уравнение (5.59), по указанным формулам получаем коротковолновую асимптотику $\hat{u}(x, t, h)$.

3.5.3 Коротковолновая асимптотика для волнового уравнения.

Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2(x, t) \Delta u, \quad a(x, t) \neq 0.$$

Подставляя $\hat{u}(x, t, h)$ вида (5.56) и используя (5.58), получаем: при h^{-2} :

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = a^2(x, t) \sum_{k=1}^n \left(-\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2 \right), \quad S|_{t=0} = S_0(x). \quad (5.60)$$

Задача (5.60) – задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом $H(p, p_{n+1}, x, t) = a^2(x, t) < p, p > -p_{n+1}^2$. Задачи такого типа подробно изучались в разделе 3.4.2.

При h^{-1} :

$$2\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t} + \phi\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a^2(x, t) \sum_{k=1}^n \left(2\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial S}{\partial x_k} + \phi\frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2} \right), \quad \phi|_{t=0} = \phi_0(x).$$

Это задача Коши для линейного УрЧП первого порядка, которую можно проинтегрировать с помощью обобщенного алгоритма А2, приведенного в разделе 3.2.3.

Замечание 7 Система ОДУ Гамильтона для (5.60) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 2a^2(x, t)p, \\ \dot{t} = -2p_{n+1}, \\ \dot{p} = -2a(x, t) < p, p > \nabla_x a, \\ \dot{p}_{n+1} = -2a(x, t) < p, p > a_t. \end{cases}$$

При этом нетрудно видеть, что поверхности $\{t = 0\}$ соответствуют две допустимых тройки, удовлетворяющие условию нехарактеристичности, если $|\nabla_x S_0(x^0)| \neq 0$. Этим двум допустимым тройкам соответствуют два решения $S_{\pm}(x, t)$ задачи (5.60). Если же условие $|\nabla_x S_0(x^0)| \neq 0$ не выполнено для некоторого x^0 , то построение решения в окрестности точки x^0 методом характеристик достаточно нетривиально. Кроме того, если $a_t = 0 \forall t$, то система ОДУ Гамильтона сводится к

$$\begin{cases} \dot{x} = 2a^2(x)p, \\ \dot{p} = -2a(x) < p, p > \nabla_x a, \end{cases}$$

$t = -2p_{n+1}^0 s$, и два решения $S(x, t)$ задачи (5.60) будут удовлетворять соотношению

$$S_+(x, -t) = -S_-(x, t).$$

В качестве примера, построим коротковолновую асимптотику для задачи Коши для уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (1+x)\psi, \\ \psi|_{t=0} = \text{tg } xe^{\frac{i}{h}(x-1)^2}. \end{cases} \quad (5.61)$$

Согласно пункту 3.5.2, задача Коши для фазы $S(t, x)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + (1 + x) = 0, \\ S|_{t=0} = (x - 1)^2, \end{cases} \quad (5.62)$$

т.е. является задачей Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби, которые подробно изучались в пункте 3.4.1. Соответствующий гамильтониан равен

$$H(p, x) = \frac{1}{2}p^2 + x + 1,$$

и далее, переходя к системе характеристических ОДУ, получаем:

$$\begin{cases} \dot{x} = p, & x|_{t=0} = x_0, \\ \dot{p} = -1, & p|_{t=0} = 2(x_0 - 1). \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение, получаем

$$p = -t + 2(x_0 - 1),$$

откуда и из первого уравнения

$$\dot{x} = -t + 2(x_0 - 1), \quad x|_{t=0} = x_0,$$

а значит,

$$x = -\frac{1}{2}t^2 + 2(x_0 - 1)t + x_0. \quad (5.63)$$

Продолжая решать задачу (5.62) согласно схеме, изложенной в пункте 3.4.1, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x_0) &= \langle p, \nabla_p H \rangle - p = \frac{1}{2}p^2 - x - 1 = \\ &= \frac{t^2 - 4t(x_0 - 1) + 4(x_0 - 1)^2}{2} + \frac{1}{2}t^2 - 2(x_0 - 1)t - x_0 - 1 = \\ &= t^2 - 4tx_0 + 4t + 2x_0^2 - 5x_0 + 1, \end{aligned}$$

и далее

$$z(t, x_0) = \int_0^t \mathcal{H}(\tau, x_0) d\tau + S_0(x_0) =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 2t^2x_0 + 2t^2 + 2x_0^2t - 5x_0t + t + (x_0 - 1)^2.$$

Выражая x_0 через t , x из (5.63), получаем

$$x_0 = \frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}. \quad (5.64)$$

Подставляя это равенство в $z(t, x_0)$, получаем решение задачи Коши (5.62):

$$S(t, x) = \frac{1}{3}t^3 - 2\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}t^2 + 2t^2 + 2\left(\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}\right)^2 t - \\ - 5\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}t + t + \left(\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1} - 1\right)^2.$$

Далее, как было сказано в пункте 4.6.1, решение задачи Коши на амплитуду $\phi(t, x)$, определенное в окрестности нуля, имеет вид

$$\phi(t, x) = \frac{\phi_0(\xi)}{\sqrt{J_x(t, \xi)}} \Big|_{\xi=K(t, x)},$$

где $K(t, x)$ – выражение ξ через x и t из равенства $x = X(t, \xi)$, $X(t, \xi)$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = \nabla S, \quad x|_{t=0} = \xi. \quad (5.65)$$

Как было сказано в пункте 4.6.1, якобиан $J_x(t, x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}$, откуда

$$J_x(t, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2(x_0 - 1)t + x_0 \right) = 2t + 1.$$

Далее, выписывая в явном виде правую часть уравнения в (5.65), получаем:

$$\nabla S(t, x) = -\frac{2t^2}{2t + 1} + \frac{4tx}{(2t + 1)^2} + \frac{4t(\frac{1}{2}t^2 + 2t)}{(2t + 1)^2} - \frac{5t}{2t + 1} + \\ + \frac{2x}{(2t + 1)^2} + \frac{2(\frac{1}{2}t^2 - 1)}{(2t + 1)^2},$$

и, решая явно задачу Коши (5.65), имеем

$$\dot{x} = \frac{2x}{2t+1} - \frac{2t^3 + 3t^2 + 5t + 2}{(2t+1)^2},$$

откуда, полагая $x = (2t+1)u$, получаем

$$2u + (2t+1)\dot{u} = 2u - \frac{2t^3 + 3t^2 + 5t + 2}{(2t+1)^2},$$

$$\dot{u} = -\frac{2t^3 + 3t^2 + 5t + 2}{(2t+1)^3},$$

$$u = -\int \frac{t^2 + t + 2}{(2t+1)^2} dt = -\int \frac{t^2 + t + 2}{4t^2 + 4t + 1} dt = -\int \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4(2t+1)^2}\right) dt,$$

$$u = -\frac{1}{4}t + \frac{7}{8(2t+1)} + C,$$

и окончательно

$$x(t, \xi) = -\frac{1}{4}t(2t+1) + \frac{7}{8} + (2t+1)C,$$

откуда, подставляя равенство $x|_{t=0} = \xi$, имеем

$$C = \xi - \frac{7}{8},$$

$$x(t, \xi) = -\frac{1}{4}t(2t+1) + \frac{7}{8} + (2t+1)\left(\xi - \frac{7}{8}\right),$$

и выражая ξ через t и x , получаем

$$\xi = \frac{7}{8} + \frac{x}{2t+1} + \frac{1}{4}t - \frac{7}{8(2t+1)} = \frac{7(2t+1) + 8x + 2t - 7}{8(2t+1)} = \frac{x + 2t}{2t+1}.$$

Отсюда, используя формулу для $\phi(t, x)$, получаем окончательно

$$\phi(t, x) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x+2t}{2t+1}\right)}{\sqrt{2t+1}}.$$

Ответ: Коротковолновая асимптотика для задачи Коши (5.61) имеет вид

$$\psi_c(t, x) = \phi(t, x)e^{\frac{i}{\hbar}S(t, x)},$$

где

$$S(t, x) = \frac{1}{3}t^3 - 2\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}t^2 + 2t^2 + 2\left(\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}\right)^2 t -$$

$$- 5\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1}t + t + \left(\frac{x + \frac{1}{2}t^2 + 2t}{2t + 1} - 1\right)^2,$$

$$\phi(t, x) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x+2t}{2t+1}\right)}{\sqrt{2t+1}}.$$

Пример 2. Приведем теперь пример построения коротковолновой асимптотики для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{9}{(t+2)^6}u_{xx} = 0, \\ \phi_0(x) = 3, \\ S_0(x) = \frac{3}{8} + x. \end{cases} \quad (5.66)$$

Согласно пункту 3.5.3, стационарное уравнение Гамильтона-Якоби для фазы, соответствующее (5.66), имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{9}{(t+2)^6}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (5.67)$$

Положим $x_1 = x$, $x_2 = t$. Тогда гамильтониан, соответствующий уравнению (5.67), имеет вид

$$H(p, x) = p^2 - \frac{9}{(x_2 + 2)^6}p_1^2,$$

и, обозначая τ параметр на характеристике, получаем систему характеристик

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{18p_1}{(x_2+2)^6}, \\ \dot{x}_2 = 2p_2, \\ \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = -54(x_2 + 2)^{-7}p_1^2. \end{cases} \quad (5.68)$$

Начальные условия для этой системы:

$$x_1|_{\tau=0} = x^0, \quad x_2|_{\tau=0} = 0, \quad p_1|_{\tau=0} = \frac{d}{dx_1}S_0(x^0) = 1. \quad (5.69)$$

Начальные условия для импульса p_2 получим из условия согласования:

$$H(p, x)|_{\tau=0} = 0,$$

откуда

$$p_2|_{\tau=0} = \pm \frac{3}{8}. \quad (5.70)$$

Из третьего уравнения системы (5.68) и начальных данных получаем, что $p_1(\tau) = 1$. Используя это равенство и поделив второе из уравнений системы на четвертое, имеем

$$\frac{dx_2}{dp_2} = -\frac{p_2(x_2 + 2)^7}{27},$$

откуда

$$-\frac{9}{2}(x_2 + 2)^{-6} = -\frac{1}{2}p_2^2 + C_1.$$

Подставляя в обе части этого равенства $\tau = 0$, получаем, что $C_1 = 0$, откуда

$$p_2^2 = \frac{9}{(x_2 + 2)^6},$$

и из условия (5.70) сразу получаем, что

$$p_2 = \pm \frac{3}{(x_2 + 2)^3}.$$

Далее разберем отдельно случаи разных знаков.

В случае, если

$$p_2 = \frac{3}{(x_2 + 2)^3},$$

из системы (5.68) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{18}{(x_2+2)^6}, \\ \dot{x}_2 = \frac{6}{(x_2+2)^3}, \end{cases}$$

откуда, поделив первое уравнение на второе, получаем

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{3}{(x_2 + 2)^3},$$

откуда

$$x_1 = \frac{3}{2(x_2 + 2)^2} + C_2,$$

и, подставляя в последнее равенство $\tau = 0$, из начальных условий (5.69) получаем

$$C_2 = x^0 - \frac{3}{8},$$

откуда окончательно

$$x = \frac{3}{2(t+2)^2} + x^0 - \frac{3}{8}. \quad (5.71)$$

Далее, в силу сказанного в пункте 3.4.2, получаем, что решение задачи Коши (5.68)-(5.70) имеет вид

$$S(t, x) = S_0(x^0(t, x)) = \frac{3}{8} + x^0 = \frac{3}{4} + x - \frac{3}{2(t+2)^2}.$$

Далее, так как уравнение на амплитуду $\phi(t, x)$ имеет вид

$$2\phi_t S_t - 2a^2(t, x) \langle \nabla \phi, \nabla S \rangle + \phi \square_a S = 0,$$

вычислим $\frac{\partial S}{\partial t}$, ∇S , $\square_a S$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{3}{(t+2)^3}, \quad \nabla S = 1, \quad \square_a S = -\frac{9}{(t+2)^4}.$$

Отсюда явный вид уравнения на ϕ :

$$\frac{6}{(t+2)^3} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{18}{(t+2)^6} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{9}{(t+2)^4} \phi = 0.$$

Домножая обе части уравнения на $\frac{1}{3}(t+2)^6$, получаем:

$$2(t+2)^3 \frac{\partial \phi}{\partial t} - 6 \frac{\partial \phi}{\partial x} - 3(t+2)^2 \phi = 0.$$

Система характеристик для этого уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{t} = 2(t+2)^3, \\ \dot{x} = 6, \\ \dot{\phi} = 3(t+2)^2 \phi. \end{cases}$$

Отсюда, разделив третье уравнение системы характеристик на первое, получаем

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\phi}{t+2},$$

откуда

$$\phi = C(t+2)^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда, воспользовавшись тем, что $\phi_0 = 3$, получаем

$$\phi(t, x) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(t+2)^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть теперь

$$p_2 = -\frac{3}{(x_2+2)^3},$$

тогда из системы (5.68) получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{18}{(x_2+2)^6}, \\ \dot{x}_2 = -\frac{6}{(x_2+2)^3}, \end{cases}$$

откуда, поделив первое уравнение на второе, получаем

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{3}{(x_2+2)^3},$$

откуда

$$x_1 = -\frac{3}{2(x_2+2)^2} + C_3,$$

и, подставляя в последнее равенство $\tau = 0$, из начальных условий (5.69) получаем

$$C_3 = x^0 + \frac{3}{8},$$

откуда окончательно

$$x = \frac{3}{2(t+2)^2} + x^0 + \frac{3}{8}. \quad (5.72)$$

Далее, в силу сказанного в пункте 3.4.2, получаем, что решение задачи Коши (5.68)-(5.70) имеет вид

$$S(t, x) = S_0(x^0(t, x)) = \frac{3}{8} + x^0(t, x) = x + \frac{3}{2(t+2)^2}.$$

Аналогично случаю знака плюс вычисляя $\frac{\partial S}{\partial t}$, ∇S , $\square_a S$, получаем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{3}{(t+2)^3}, \quad \nabla S = 1, \quad \square_a S = \frac{9}{(t+2)^4}.$$

Отсюда явный вид уравнения на амплитуду ϕ :

$$-\frac{6}{(t+2)^3} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{18}{(t+2)^6} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{9}{(t+2)^4} \phi = 0.$$

Домножая обе части уравнения на $-\frac{1}{3}(t+2)^6$, получаем:

$$2(t+2)^3 \frac{\partial \phi}{\partial t} + 6 \frac{\partial \phi}{\partial x} - 3(t+2)^2 \phi = 0.$$

Система характеристик для этого уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{t} = 2(t+2)^3, \\ \dot{x} = -6, \\ \dot{\phi} = 3(t+2)^2 \phi. \end{cases}$$

Отсюда, разделив третье уравнение системы характеристик на первое, получаем то же уравнение, что и в случае знака плюс:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\phi}{t+2},$$

откуда в силу совпадения начальных условий для этих уравнений делаем вывод, что

$$\phi(t, x) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(t+2)^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: Коротковолновая асимптотика для задачи Коши (5.66) имеет вид

$$S_+(t, x) = \frac{3}{4} + x - \frac{3}{2(t+2)^2}, \quad \phi_+(t, x) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(t+2)^{\frac{3}{2}};$$

$$S_-(t, x) = x + \frac{3}{2(t+2)^2}, \quad \phi_-(t, x) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(t+2)^{\frac{3}{2}}.$$

Литература.

В.И. Арнольд, „Математические методы классической механики“

Глава 4

Обобщенные решения.

4.1 Обобщенные решения задачи Коши для закона сохранения.

4.1.1 Интегральное решение. Условие Рэнкина-Гюгоньо.

Будем рассматривать следующую задачу Коши для скалярного закона сохранения с одной пространственной переменной:

$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Как было показано в пункте 6.6, задача (1.1) не имеет в общем случае решения, принадлежащего классу C^1 и существующего при всех $t > 0$, даже если функция $g(x) \in C^\infty$. Попробуем обобщить понятие решения задачи (1.1) на более широкий класс функций. Для этого введем сначала класс пробных функций.

Определение. Множеством пробных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ назовем множество функций $v(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ таких, что для функции $v(t, x)$ существует компакт $K \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ такой, что $\forall (t, x) \notin K$ верно $v(t, x) = 0$.

Домножим теперь уравнение из (1.1) на пробную функцию $v(t, x)$ и проинтегрируем по $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $F(0) = 0$. Далее, интегрируя по частям, получаем:

$$0 = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t + (F(u))_x) v(t, x) dx dt = - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) v_t(t, x) dx dt -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} uv dx|_{t=0} - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)v_x dx dt.$$

Отсюда, учитывая, что $u|_{t=0} = g(x)$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t, x)v_t(t, x) + F(u(t, x))v_x(t, x)) dx dt + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)v(0, x) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметим, что равенство (1.2) имеет смысл для функций $u(t, x)$ из более широкого класса, чем C^1 – для всех ограниченных функций.

Определение. Равенство (1.2) будем называть **интегральным тождеством**, соответствующим задаче (1.1). Функцию $u(t, x) \in L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ будем называть интегральным решением задачи (1.1) (в другой терминологии – обобщенным решением в смысле интегрального тождества), если для всех пробных функций $v(t, x)$ имеет место интегральное тождество (1.2).

Утверждение 5 Пусть $u(t, x)$ – интегральное решение задачи (1.1) и $u(t, x) \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$. Тогда $u(t, x)$ – классическое решение задачи (1.1), т.е. удовлетворяет уравнению (1.1) и начальным условиям.

Доказательство. В силу того, что $u \in C^1$, равенство (1.2) можно проинтегрировать по частям. Отсюда в силу определения интегрального решения имеем, что $\forall v(t, x) \in C_0^{+\infty}([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ верно равенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - u(0, x))v(0, x) dx - \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t(t, x) + (F(u(t, x)))_x)v(t, x) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отсюда в силу произвольности выбора функции $v(t, x)$ следует требуемое.

Упражнение. Доказать, что если равенство (1.3) выполнено для всех пробных функций $v(t, x)$, то функция $u(t, x)$ – решение (1.1). Указание: выбрать сначала функции $v(t, x) \in C_0^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$.

Попробуем теперь получить некоторую информацию об интегральном решении из (1.2). Пусть V – открытое множество в $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, функция $u(t, x)$ – интегральное решение (1.1), являющееся кусочно-гладкой функцией в V , причем V содержит ровно одну кривую разрыва $c = \{(t, x(t))\}$ функции $u(t, x)$. Обозначим $V_L = \{(t, x) \in V, x < x(t)\}$, $V_R = \{(t, x) \in V, x > x(t)\}$. Тогда определены пределы слева и справа на кривой разрыва c :

$$\begin{aligned} u_R(t_0, x_0) &= \lim_{V_R \ni (t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} u(t, x), \quad u_L(t_0, x_0) = \\ &= \lim_{V_L \ni (t, x) \rightarrow (t_0, x_0)} u(t, x). \end{aligned}$$

Оказывается, что имеет место следующее соотношение между пределами слева и справа на кривой разрыва.

Теорема 21 (Условие Рэнкина-Гюгонно.) Пусть кривая разрыва c интегрального решения $u(t, x)$ – график функции $x = x(t)$. Тогда указанное интегральное решение удовлетворяет на кривой c условию Рэнкина-Гюгонно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos(\nu, t)}{\cos(\nu, x)}$, где ν – единичная нормаль к c , направленная из V_L в V_R , $\cos(\nu, t)$ и $\cos(\nu, x)$ – ее направляющие косинусы. Обозначим $[u] = u_R - u_L$ – скачок функции u на кривой разрыва c , $[F(u)] = F(u_R) - F(u_L)$. Заметим, что (1.4) эквивалентно равенству

$$[u] \cos(\nu, t) + [F(u)] \cos(\nu, x) = 0. \quad (1.5)$$

Пусть $v(t, x)$ – пробная функция с компактным носителем в V_L , тогда в силу (1.2) и гладкости $u(t, x)$ в V_L имеем $u_t + (F(u))_x = 0$ в V_L . Аналогичным образом такое равенство имеет место внутри V_R . Пусть теперь

$v(t, x)$ – произвольная пробная функция с компактным носителем в V . Тогда в силу (1.2) имеем

$$0 = \iint_{V_L} (uv_t + F(u)v_x) dxdt + \iint_{V_R} (uv_t + F(u)v_x) dxdt,$$

откуда в силу выбора $v(t, x)$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{V_L} (uv_t + F(u)v_x) dxdt &= - \iint_{V_L} (u_t + (F(u))_x) v dxdt + \\ &+ \int_c (u_L \nu_2 + F(u_L) \nu_1) v dl = \int_c (u_L \nu_2 + F(u_L) \nu_1) v dl, \end{aligned}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (\cos(\nu, x), \cos(\nu, t))$ – нормаль к кривой c , описанная выше. Аналогично

$$\iint_{V_R} (uv_t + F(u)v_x) dxdt = - \int_c (u_R \nu_2 + F(u_R) \nu_1) v dl,$$

откуда и из предыдущего равенства в силу произвольности функции $v(t, x)$ получаем (1.5).

Теорема доказана.

Определение. Кусочно-непрерывные решения задачи (1.1) в смысле интегрального тождества будем называть ударными волнами.

Утверждение 6 (Сохранение среднего.) Пусть $u(t, x) \in KC^1$, финитна по x , имеет одну кривую разрыва $x = x(t)$ и является обобщенным решением (1.1) в смысле интегрального тождества. Обозначим $S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx$ – пространственное среднее. Тогда $S(t) = const$.

Доказательство. Действительно,

$$S(t) = \int_{-\infty}^{x(t)} u(t, x) dx + \int_{x(t)}^{+\infty} u(t, x) dx.$$

Далее,

$$\frac{dS}{dt} = u(t, x(t) - 0) \dot{x}(t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{x(t)} u_t(t, x) dx - u(t, x(t) + 0) \dot{x}(t) + \int_{x(t)}^{+\infty} u_t(t, x) dx = \\
& = (u_L - u_R) \dot{x}(t) - \int_{-\infty}^{x(t)} (F(u(t, x)))_x dx - \int_{x(t)}^{+\infty} (F(u(t, x)))_x dx = \\
& = (u_L - u_R) \dot{x}(t) + F(u(t, -\infty)) - F(u(t, x(t) - 0)) - F(u(t, +\infty)) + \\
& F(u(t, x(t) + 0)) = (u_L - u_R) \dot{x}(t) + F(0) - F(u_L) - F(0) + F(u_R) = 0
\end{aligned}$$

в силу условия Рэнкина-Гюгонио (1.4).
Утверждение доказано.

4.1.2 Пример неединственности интегрального решения.

Пусть $F(u) = u^2$, $g(x) = 0$. Тогда задача Коши (1.1) имеет вид

$$\begin{cases} u_t + 2uu_x = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Положим

$$u_\delta(t, x) = \begin{cases} 0, & x < \delta t, \\ -\delta, & -\delta t < x < 0, \\ \delta, & 0 < x < \delta t, \\ 0, & x > \delta t, \end{cases}$$

где $\delta > 0$. Заметим, что в каждой из областей, где $u_\delta(t, x)$ – гладкая, она является решением (1.6). Проверим условие Рэнкина-Гюгонио на каждой из кривых разрыва. При $x = 0$ получаем: $u_L = -\delta$, $u_R = \delta$, $F(u_R) = F(u_L) = \delta^2$, $[F(u)] = 0$, $[u] = 2\delta$, $\dot{x}(t) = 0$ и условие Рэнкина-Гюгонио выполнено: $0 = \frac{0}{2\delta}$ – верное равенство. Аналогичным образом можно показать, что условие Рэнкина-Гюгонио выполнено и на других кривых разрыва. Тем самым, оказывается, что функция $u_\delta(t, x)$ – интегральное решение задачи (1.6) при любом положительном δ . Заметим, что кусочно-постоянное решение задачи (1.6) с двумя линиями разрыва построить нельзя, т.к. у него должны быть скачки от 0 к некоторому δ

и от δ к нулю, а эти разрывы по условию Рэнкина-Гюгонио могут быть только на прямой

$$x = \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta - 0}t = \delta t,$$

и линия разрыва одна, а не две, как предполагалось.

Упражнение. Построить обобщенное решение, отличное от тождественного нуля на множестве положительной меры, для

$$u_t + 3u^2u_x = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

4.1.3 Энергетические оценки.

Как было показано в предыдущем пункте, интегральное решение задачи Коши (1.1) вообще говоря, не единственно. Однако, нетрудно видеть, что гладкое (классическое) решение задачи (1.1) единственно при тех $t \in [0, T)$, при которых оно существует. Попробуем понять, какое же из интегральных решений является „наследником“ классического решения, т.е. выделить некое свойство классического решения, которое сохраняется уже не для всех интегральных решений той же задачи Коши, а только для одного из них. Дадим наглядную интерпретацию условия необратимости. Для этого введем полную кинетическую энергию системы

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t, x) dx.$$

Пусть $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ – финитная функция. Тогда на $[0, T)$, $T > 0$, существует классическое и финитное по x при фиксированном t решение $u(t, x)$ задачи (1.1). Далее будем считать, что $u(t, x)$ – финитна по x при всех $t \geq 0$, откуда следует, что $E(t) < +\infty$.

Утверждение 7 (Сохранение энергии.) Пусть $t < T$, тогда $E(t) = E(0) = \text{const}$.

Доказательство. Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} uu_t dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(F(u))_x dx =$$

$$= -uF(u)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)u_x dx = \int_{u(t,-\infty)}^{u(t,+\infty)} F(u)du = \int_0^0 F(u)du = 0,$$

откуда следует требуемое.

Утверждение 8 (Падение кинетической энергии на сильном разрыве). Пусть $u(t, x)$ – обобщенное решение задачи Коши (1.1) в смысле интегрального тождества, удовлетворяющее условию энтропии 2, с одной линией сильного разрыва $x = x(t)$. Тогда скорость убывания кинетической энергии $E(t)$ на этом решении в каждый момент времени $t = t_0$ равна площади $S(t_0)$, ограниченной графиком функции $F(u)$ на отрезке $[u_L, u_R]$ (или $[u_R, u_L]$) и хордой, соединяющей точки $(u_L, F(u_L))$ и $(u_R, F(u_R))$ на этом графике:

$$\frac{dE}{dt}(t_0) = -S(t_0).$$

Доказательство. Пусть для определенности $u_L < u_R$, тогда в силу условия энтропии имеем

$$S(t_0) = \int_{u_L}^{u_R} F(u)du - \frac{F(u_R) + F(u_L)}{2}(u_R - u_L).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t_0) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2(t, x)dx = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} \frac{1}{2}u^2(t, x)dx + \int_{x(t)}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2(t, x)dx \right) = \\ &= \frac{1}{2}u_L^2 \dot{x}(t_0) + \int_{-\infty}^{x(t_0)} uu_t dx - \frac{1}{2}u_R^2 \dot{x}(t_0) + \int_{x(t_0)}^{+\infty} uu_t dx = \\ &= \frac{u_L^2 - u_R^2}{2} \dot{x}(t_0) - \int_{-\infty}^{x(t_0)} u(F(u))_x dx - \int_{x(t_0)}^{+\infty} u(F(u))_x dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u_L^2 - u_R^2}{2} \dot{x}(t_0) - uF(u)|_{x=-\infty}^{x=x(t_0)} + \int_{-\infty}^{x(t_0)} F(u)u_x dx - \\
&\quad - uF(u)|_{x=x(t_0)}^{x=+\infty} + \int_{x(t_0)}^{+\infty} F(u)u_x dx.
\end{aligned}$$

В силу условия Рэнкина-Гюгонно (1.4) и с учетом $u(t, \pm\infty) = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{u_L^2 - u_R^2}{2} \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} - u_L F(u_L) + \\
&+ \int_0^{u_L} F(u) du + u_R F(u_R) + \int_{u_R}^{u_L} F(u) du = -S(t_0),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $E(t) = E(0)$ до возникновения ударной волны, а затем $\frac{dE}{dt} < 0$, если

$$S(t) > 0 \quad (1.7)$$

Предположим, что $F''(u) \geq 0$, $F \in C^3$, $g \in C^2$. Для выпуклой функции $F''(u) > 0$ отсюда следует условие допустимости разрыва:

$$u_L > u_R. \quad (1.8)$$

Если же теперь $F''(u) \leq 0$, то аналогичным рассуждением получаем, что $u_R \geq u_L$. Отсюда вытекает следующее определение.

Определение. Пусть $F \in C^3$, $g \in C^2$, $F''(u) \neq 0$, $u(t, x)$ – обобщенное решение (1.1), $x(t)$ – кривая разрыва. Тогда разрыв является допустимым, если выполнено следующее неравенство:

$$F''(u)(u_R - u_L) \leq 0. \quad (1.9)$$

4.1.4 Допустимые разрывы и условие энтропии.

На случай невыпуклой функции F условие допустимости разрыва можно обобщить следующим образом

Условие 2 (Условие энтропии.) Если $u_L < u_R$, то график функции $F(u)$ на отрезке $[u_L, u_R]$ не ниже хорды, соединяющей точки $(u_L, F(u_L))$ и $(u_R, F(u_R))$. Если $u_L > u_R$, то график функции $F(u)$ на отрезке $[u_R, u_L]$ не выше хорды, соединяющей точки $(u_L, F(u_L))$ и $(u_R, F(u_R))$.

Итак, кинетическая энергия рассеивается (частично она переходит в тепловую). Следовательно, эволюция обобщенных решений с ударными волнами связана с убыванием кинетической энергии, что влечет за собой необратимость физических процессов, моделируемых уравнением (1.1).

Условие 2 названо условием энтропии в связи с тем, что оно характеризует необратимость природных процессов, описываемых задачей Коши (1.1).

„Физическое“ обоснование условия допустимости разрыва (1.9) следующее: из этого неравенства следует, что в случае $F \gg 0$ в любой точке $x_0 = x(t_0)$ линии разрыва имеет место неравенство

$$F'(u_R) < \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} < F'(u_L),$$

и, в силу условия Рэнкина-Гюгонио (1.4) получаем, что

$$F'(u_R) < \dot{x}(t) < F'(u_L),$$

т.е. с ростом t характеристики подходят к линии разрыва, а не отходят от нее. Тем самым, если условие (1.9) выполнено, то линия разрыва возникает естественно, а не является „навязанной“.

4.1.5 Обобщенное решение по Кружкову.

Предположим, что $F''(u) \geq 0$, $F \in C^3$, $g \in C^2$. Пусть гладкое решение задачи (1.1) существует в полосе $\Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}$. Продифференцируем (1.1) по x и положим $p = u_x(t, x)$. Тогда

$$0 = p_t + F'(u)p_x + F''(u)p_x^2 \geq p_t + F'(u)p_x.$$

Вдоль любой характеристике $x(t)$, удовлетворяющей уравнению $\dot{x} = F'(u(t, x(t)))$, из этого неравенства получаем

$$0 \geq p_t + \dot{x}p_x = \frac{dp}{dt},$$

т.е. функция $p(t, x)$ не возрастает вдоль характеристик. Следовательно, для любой точки $(t, x) \in \Pi_T$ верно неравенство $p(t, x) \leq \sup_{\mathbb{R}} g'(x) = K_0$. Перепишывая это неравенство с помощью теоремы о среднем, для любых $t \in [0, T)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ получаем

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0. \quad (1.10)$$

Условие Рэнкина-Гюгонио и условие энтропии имеют смысл только для кусочно-гладких функций $u(t, x)$ – иначе неясно, что такое односторонние пределы и линия разрыва. Однако, неравенство (1.10) имеет смысл и при $t \geq T$, т.е. для разрывных функций. Перепишем (1.10) в виде $u(t, x_2) \leq K_0(x_2 - x_1) + u(t, x_1)$. Пусть $x(t)$ – кривая разрыва, $x_0 = x(t_0)$, $x_2 \rightarrow x_0 + 0$, $x_1 \rightarrow x_0 - 0$. Тогда, согласно введенным ранее обозначениям, $u(t_0, x_2) \rightarrow u_R$, $u(t_0, x_1) \rightarrow u_L$, и при $u^R \neq u^L$ получаем

$$u^L > u^R$$

Равенство (1.2) имеет смысл для гораздо более широкого класса функций. Обобщение понятия энтропийного решения (т.е. интегрального решения, удовлетворяющего условию энтропии 2) введено Кружковым:

Определение. Ограниченная измеримая в полосе $\Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}$ функция $u(t, x)$ называется обобщенным энтропийным решением по Кружкову задачи (1.1), если:

1. Для любого вещественного k и для любой пробной функции $\phi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$ такой, что $\phi(t, x) \geq 0$ верно

$$\int_{\Pi_T} (|u(t, x) - k| \phi_t + \text{sign}(u(t, x) - k)(F(u(t, x)) - F(k)) \phi_x) dx dt \geq 0 \quad (1.11)$$

2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $a < b$ верно

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \int_a^b |u(t, x) - g(x)| dx = 0. \quad (1.12)$$

Теорема 22 *Обобщенное энтропийное решение по Кружкову задачи (1.1) существует и единственно для всех начальных функций $g(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Теорема 23 *Обобщенное энтропийное решение по Кружкову задачи (1.1) является интегральным решением задачи (1.1).*

Доказательство. Пусть сначала $k > \sup_{\Pi_T} u(t, x)$. Т.к. $k_t + (F(k))_x = 0$, то для любой пробной функции $\phi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(t, x) \geq 0$, $\phi(0, x) = 0$ верно

$$\int_{\Pi_T} (k\phi_t + F(k)\phi_x) dx dt = 0.$$

Отсюда и из (1.11) имеем

$$\int_{\Pi_T} ((k - u)\phi_t + (F(k) - F(u))\phi_x) dx dt \geq 0,$$

откуда

$$\int_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt \leq 0.$$

Аналогично, выбирая $k < \inf_{\Pi_T} u(t, x)$, получаем

$$\int_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt \geq 0.$$

Отсюда для всех пробных функций $\phi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(t, x) \geq 0$, $\phi(0, x) = 0$ имеем

$$\int_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt = 0. \quad (1.13)$$

Заметим, что для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ найдутся функции $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\Pi_T)$ такие, что $\phi_j \geq 0$ и $\phi(t, x) = \phi_1(t, x) - \phi_2(t, x)$. Отсюда для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(0, x) = 0$ верно (1.13). Пусть теперь $\phi(0, x) \neq 0$, тогда в силу требования (1.12)

$$\int_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, x)\phi(0, x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(0, x) dx,$$

откуда следует доказываемое.

Утверждение 9 Пусть $u(t, x) \in KC^1(\Pi_T)$ – обобщенное энтропийное решение по Кружкову. Тогда на любой линии разрыва выполнено условие допустимости разрыва 2.

Литература.

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §3.3.1

А.Ю.Горицкий, С.Н.Кружков, Г.А.Чечкин, „Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, центрированные волны разряжения (краткое учебное пособие)“

4.2 Введение в теорию обобщенных функций.

4.2.1 Пробные функции и их свойства.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество.

Определение. Пусть $u \in C(\Omega)$. Носителем функции $u(x)$ называется множество $\text{supp } u$ – замыкание в Ω множества $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$.

Введем также некоторые обозначения для функциональных пространств.

Обозначение 1 Пусть $C_0^k(\Omega)$ – множество функций $u(x) \in C^k(\Omega)$ таких, что $\text{supp } u$ – компакт. Пусть также

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(\Omega),$$

$C_0^\infty(\Omega)$ – множество функций $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ таких, что $\text{supp } u$ – компакт.

Если продолжить функцию $u(x) \in C_0^k(\Omega)$ на \mathbb{R}^n , положив $u(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то мы получим функцию из $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, пространство $C_0^k(\Omega)$ можно рассматривать как подпространство $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, расширяющееся вместе с Ω .

Лемма 5 (Корректность определения C_0^∞) Существует функция $\phi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\phi_0(x) \geq 0$ и $\phi_0(0) > 0$.

Доказательство. Положим

$$f(t) = \begin{cases} \exp(1 - \frac{1}{t}), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выберем $\phi_0(x) = f(1 - |x|^2)$. Тогда $\phi_0(x)$ – искомая.

Определение. Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ обычно называют пространством пробных функций на Ω , а функции из этого пространства – пробными.

Теорема 24 Если $f(x), g(x) \in C(\Omega)$ и для любой функции $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx, \quad (2.14)$$

то $f(x) = g(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда

$$\forall \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} h(x)\phi(x)dx = 0. \quad (2.15)$$

Пусть $h(x^0) \neq 0, x^0 \in (\Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $h(x^0) > 0$. Так как функция $h(x) \in C(\Omega)$, то найдется содержащаяся в Ω окрестность U точки x^0 такая, что $\forall x \in U : h(x) > \frac{1}{2}h(x^0)$. Возьмем функцию $\phi_1(x) = \phi_0(\frac{x-x^0}{M})$, где функция $\phi_0(x)$ определена в лемме 5, $M > 0$ выбрано так, что $\text{supp } \phi_1 \subset U$. Тогда функция $h(x)\phi_1(x)$ непрерывна, имеет постоянный знак и $h(x^0)\phi_1(x^0) = h(x^0)$. Значит, найдется окрестность $U_1 \subset U$ точки x^0 такая, что $h(x)\phi_1(x) > \frac{1}{2}h(x^0) \forall x \in U_1$. Но отсюда следует, что

$$\int_{\Omega} h(x)\phi_1(x)dx \geq \int_{U_1} h(x)\phi_1(x)dx > \frac{1}{2}h(x^0) \text{mes}(U_1) > 0,$$

что противоречит (2.15). Таким образом, $h(x) = 0$.

Пусть теперь $u(x), v(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, хотя бы одна из функций $u(x), v(x)$ имеет компактный носитель.

Определение. Сверткой функций $u(x)$ и $v(x)$ называется функция

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy. \quad (2.16)$$

Нетрудно видеть, что функция $u*v$ непрерывна. Кроме того, выбирая $x - y$ в качестве новой переменной, получим

$$(u * v)(x) = (v * u)(x). \quad (2.17)$$

Утверждение 10 *Равенство (2.16) эквивалентно равенству*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u * v)(x) \phi(x) dx = \iint_{\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_x^n} u(x) v(y) \phi(x + y) dx dy \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.18)$$

Доказательство. Действительно, с помощью замены переменной нетрудно видеть, что из (2.16) следует (2.18). Обратное верно по теореме 24.

Следствие 2 *Равенство (2.17) следует из коммутативности сложения в \mathbb{R}^n .*

Следствие 3 *Из ассоциативности сложения следует, что*

$$(u * v) * w = u * (v * w). \quad (2.19)$$

Если, помимо наложенного выше требования на компактность носителя, верно $u(x) \in C^1$, $v(x) \in C^0$, то, дифференцируя равенство (2.16) по параметру, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u * v) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u \right) * v.$$

Отсюда и из (2.17) следует, что если $u \in C^j$, $v \in C^k$, то $u * v \in C^{j+k}$, и

$$\partial_x^{\alpha+\beta} (u * v) = (\partial_x^\alpha u) * (\partial_x^\beta v), \quad |\alpha| \leq j, \quad |\beta| \leq k. \quad (2.20)$$

Можно доказать, что $u * v \in C^0$, если $u \in C_0^0$, $v \in L_{1,loc}$. Более того, оказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 25 *Если $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, то $u * v \in C^j(\mathbb{R}^n)$ при $v \in L_{1,loc}$ и $u * v \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n)$ при $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 26 (О регуляризации.) *Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$. Если $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, то функция $u_\phi = u * \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом при $\text{supp } \phi \rightarrow \{0\}$ верно*

$$\forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, |\alpha| \leq j : \sup |\partial_x^\alpha u - \partial_x^\alpha u_\phi| \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

Если $v \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то $v_\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $v_\phi \rightarrow v$ в L_p при $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. В силу (2.20) и теоремы 25 достаточно доказать (2.21) при $\alpha = 0$. Пусть $\text{supp } \phi$ лежит в шаре $|y| < \delta$. Тогда

$$|u(x) - u_\phi(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(x-y))\phi(y)dy \right| \leq \sup_{|y| < \delta} |u(x) - u(x-y)|,$$

и правая часть стремится к нулю вместе с δ равномерно по x , так как функция $u(x)$ равномерно непрерывна как непрерывная на компактном множестве. Отсюда следует (2.21). Так как $\|v_\phi\|_{L_p} \leq \|v\|_{L_p}$ и C_0^0 плотно в L_p , отсюда сразу следует второе утверждение теоремы.

Следствие 4 Если $f, g \in L_{1,loc}(\Omega)$ и для всех пробных функций $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено (2.14), то $f(x) = g(x)$ п.в..

Теорема 27 (Построение срезающей функции.) Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдется функция $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \phi \leq 1$ и $\phi = 1$ в некоторой окрестности K .

Доказательство. Т.к. K – компакт, Ω – открытое множество, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in K, \forall y \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ верно неравенство $|x - y| \geq 4\varepsilon$. Пусть $v(x)$ – характеристическая функция множества $K_{2\varepsilon} = \{y \mid \exists x \in K : |x - y| < 2\varepsilon\}$. По лемме 5 найдется неотрицательная функция $\chi \in C_0^\infty(B)$, где B – единичный шар, такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)dx = 1$. Тогда функция $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$ имеет носитель в шаре $\{|x| < \varepsilon\}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x)dx = 1$. Положим $\phi(x) = (v * \chi_\varepsilon)(x)$. В силу теоремы о регуляризации $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что $\text{supp } (u * v) \subseteq \{x + y \mid x \in \text{supp } u, y \in \text{supp } v\}$. Отсюда $\phi(x) \in C_0^\infty(K_{3\varepsilon})$ и функция $1 - \phi(x) = (1 - v) * \chi_\varepsilon$ совпадает с нулем на K_ε . Кроме того,

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= |(v * \chi_\varepsilon)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)|\chi_\varepsilon(x-y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)dy = 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из неотрицательности функций $v(x), \chi_\varepsilon(x)$ следует, что $0 \leq \phi(x) \leq 1$.

Замечание 8 Заметим, что $|\partial^\alpha \phi| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \chi_\varepsilon| dx = \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \chi| dx$, т.е. $|\partial^\alpha \phi| \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$, где C_α – константа, зависящая только от α и n и не зависящая от выбора множества Ω и компакта K .

Теорема 28 (Разбиение в сумму.) Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ – открытые множества в \mathbb{R}^n , $\phi(x) \in C_0^\infty(\cup_{j=1}^k \Omega_j)$. Тогда найдутся функции $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, \dots, k$ такие, что $\phi = \sum_{j=1}^k \phi_j$. При этом если $\phi \geq 0$, то можно выбрать все $\phi_j \geq 0$.

Доказательство. Т.к. носитель функции $\phi(x)$ – компакт, содержащийся в $\cup_{j=1}^k \Omega_j$, то найдутся компактные множества K_1, \dots, K_k такие, что $K_j \subset \Omega_j$ и $\text{supp } \phi \subseteq \cup_{j=1}^k K_j$. Далее, по теореме 27 найдутся функции $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ такие, что $0 \leq \psi_j \leq 1$ и $\psi_j = 1$ на K_j . Тогда функции $\phi_1 = \phi \psi_1$, $\phi_2 = \phi(1 - \psi_1)\psi_2$, \dots , $\phi_k = \phi(\prod_{j=1}^{k-1} (1 - \psi_j))\psi_k$ обладают требуемым свойством, т.к. в любой точке множества $K = \cup_{j=1}^k K_j$ либо $\phi(x) = 0$, либо найдется $j = 1, \dots, k$ такое, что $1 - \psi_j = 0$, а кроме того, $\text{supp } \phi \subseteq K$.

Из теорем 27 и 28 вытекает следующее полезное утверждение.

Теорема 29 (Разбиение единицы.) Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ – открытые множества в \mathbb{R}^n , K – компактное подмножество $\cup_{j=1}^k \Omega_j$. Тогда найдутся функции $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega_j)$ такие, что $\phi_j(x) \geq 0$ и $\sum_{j=1}^k \phi_j(x) \leq 1$, причем в некоторой окрестности K верно $\sum_{j=1}^k \phi_j(x) = 1$.

Про функции $\phi_j(x)$ в таком случае говорят, что они образуют *разбиение единицы* на K , подчиненное покрытию компакта K множествами Ω_j .

Упражнения к пункту 1.

1. Доказать, что если $u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, $v \in C(\mathbb{R}^n)$, то $u * v \in C(\mathbb{R}^n)$.
2. Доказать равенство (2.19).
3. Доказать следствие 4.
4. Вывести теорему 29 как следствие из теорем 27 и 28.

4.2.2 Определение и основные свойства обобщенных функций.

Пусть Ω – открытое подмножество \mathbb{R}^n . Рассмотрим функционал на $C_0^\infty(\Omega)$ следующего вида:

$$L(\phi) = \sum_{\alpha} \int_{\Omega} f_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} \phi(x) dx, \quad (2.22)$$

где $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, функции $f_{\alpha}(x) \in C(\Omega)$ заданы, и число слагаемых в сумме конечно. Как мы уже видели раньше, выражения вида (2.22) возникают при записи уравнений с частными производными в форме интегральных тождеств. Заметим, что если $L(\phi)$ удовлетворяет (2.22), то

$$|L(\phi)| \leq \sum_{\alpha} \sup_{x \in \Omega} |\partial^{\alpha} \phi(x)| \int_{\Omega} |f_{\alpha}(x)| dx.$$

Определение. Обобщенная функция (распределение) u на Ω – это линейный функционал на $C_0^\infty(\Omega)$ такой, что для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдутся константы C, k такие, что

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^{\alpha}(\phi)|, \quad \phi \in C_0^\infty(K). \quad (2.23)$$

Множество всех распределений на Ω будем обозначать $D'(\Omega)$. Если в (2.23) можно использовать одно и то же k для всех компактов K , то говорят, что распределение u имеет порядок не выше k .

Таким образом, распределение $u \in D'(\Omega)$ – это отображение $u: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ (вообще говоря, $u: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$) такое, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ верно $u(a\phi + b\psi) = au(\phi) + bu(\psi)$, а также выполнено условие (2.23). Заметим, что равенство (2.22) определяет распределение порядка не выше k , если $f_{\alpha} = 0$ при $|\alpha| > k$.

Пример: для любого $x^0 \in \Omega$ и для любого мультииндекса α формула $u(\phi) = \overline{\partial^{\alpha} \phi(x^0)}$ определяет распределение порядка ровно $|\alpha|$. То, что порядок этого распределения не меньше $|\alpha|$, следует из того, что если взять $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $\psi(0) = 1$, и положить $\phi_{\delta}(x) = (x - x^0)^{\alpha} \psi(\frac{x - x^0}{\delta})$, то $u(\phi_{\delta}) = \alpha!$ и $\sup |\partial^{\beta} \phi_{\delta}| \leq C \delta^{|\alpha| - |\beta|} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $|\beta| < |\alpha|$.

Определим сходимость в пространстве пробных функций следующим образом.

Определение. Будем говорить, что $\phi_j \rightarrow \phi$ в $D(\Omega)$, $j \rightarrow +\infty$, если $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega) \forall j$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\text{supp } \phi_j \subseteq K \forall j$ и $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha(\phi_j - \phi)| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

Оказывается, что эквивалентным условию (2.23) является условие *секвенциальной непрерывности*.

Теорема 30 (Секвенциальная непрерывность.) *Линейный функционал u является распределением на Ω тогда и только тогда, когда для любой последовательности ϕ_j , сходящейся к нулю в $D(\Omega)$, верно $u(\phi_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.*

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из определения сходимости в $D(\Omega)$ и условия (2.23). Докажем достаточность. Предположим противное. Пусть найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что (2.23) не выполнено ни при каких C, k . Возьмем $C = k = j$, тогда найдется $\phi_j \in C_0^\infty(K)$ такая, что

$$|u(\phi_j)| > j \sum_{|\alpha| < j} |\partial^\alpha \phi_j|.$$

Заметим, что это неравенство не нарушится при замене ϕ_j на $\lambda \phi_j$. Таким образом, можно считать, что $u(\phi_j) = 1$. Но тогда $|\partial^\alpha \phi_j| \leq \frac{1}{j}$ при $j \geq |\alpha|$, откуда $\phi_j \rightarrow 0$ в $D(\Omega)$ при $j \rightarrow +\infty$. Но $u(\phi_j) = 1 \not\rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Противоречие.

Если $Y \subset \Omega$, $u \in D'(\Omega)$, то можно сузить (ограничить) обобщенную функцию u до распределения на Y , положив $u|_Y(\phi) = u(\phi)$, $\phi \in C_0^\infty(Y)$.

Теорема 31 *Если $u \in D'(\Omega)$, и для любой точки $x^0 \in \Omega$ существует окрестность U этой точки такая, что $u|_U = 0$, то $u = 0$.*

Доказательство. Пусть $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. По лемме об открытом покрытии найдется конечное число открытых окрестностей U_j точек Ω , удовлетворяющих условиям теоремы и таких, что $\text{supp } \phi \subset \cup_j U_j$. Отсюда по теореме 28 найдутся $\phi_j \in C_0^\infty(U_j)$ такие, что $\phi = \sum_j \phi_j$. Но так как $u(\phi_j) = 0$, то $u(\phi) = \sum_j u(\phi_j) = 0$.

Определение. Носитель $\text{supp } u$ обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$ – это множество всех точек Ω таких, что у них нет ни одной открытой окрестности, ограничение на которую для распределения u равно нулю.

Заметим, что для любой функции $v \in C(\Omega)$ ей можно сопоставить распределение u по правилу $u(\phi) = \int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx$. В дальнейшем мы будем отождествлять такие распределения с соответствующими непрерывными функциями.

Определение. Носитель сингулярности распределения u – множество $\text{sing supp } u$ – множество всех точек Ω , у которых нет ни одной открытой окрестности, ограничение на которую распределения u является бесконечно гладкой функцией.

Заметим теперь, что $D'(\Omega)$ – векторное пространство с естественно определенными сложением и умножением на число. Зададим сходимость в $D'(\Omega)$ следующим образом:

Определение. Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $u_j \in D'(\Omega)$ сходится к $u \in D'(\Omega)$ при $j \rightarrow +\infty$ (и обозначать это $u_j \xrightarrow{D'} u, j \rightarrow \infty$), если для любой пробной функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ верно соотношение $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(\phi) = u(\phi)$.

Примеры.

1. $u_n(\phi) = \int_{-1}^1 \frac{x}{n} \phi(x) dx \xrightarrow{D'} 0, n \rightarrow \infty.$

Действительно, зафиксируем $\phi \in C_0^\infty((-1; 1))$. Тогда

$$|u_n(\phi)| = \frac{1}{n} \left| \int_{-1}^1 x \phi(x) dx \right| = \frac{C}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\phi) = u(\phi) = 0$, откуда $u(\phi) = 0$.

2. $u_n(\phi) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2} \phi(x) dx \xrightarrow{D'} \delta_0(\phi), n \rightarrow \infty$, где $\delta_0(\phi) = \phi(0)$.

Упражнения к пункту 2.

1. Проверить сходимость в примере 2. Указание: воспользоваться интегральной теоремой о среднем.
2. Сопоставим функции $v(x) = |x|$ обобщенную функцию $u \in D'((-1; 1))$. Найти $\text{supp } u$ и $\text{sing supp } u$.
3. Найти предел последовательности функций $u_n(x)$ в $D'(\mathbb{R})$, где

$$u_n = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{n}, \\ nx, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

4.2.3 Дифференцирование распределений и умножение на гладкую функцию. Свертка с гладкой функцией.

Если $u \in C^1(\Omega)$, то, как легко видеть из формулы интегрирования по частям, для любой пробной функции $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_k} u)(x) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) (\partial_{x_k} \phi)(x) dx.$$

Если же $f \in C^\infty(\Omega)$, то, очевидно, для любой пробной функции $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функция $f(x)\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, и верно равенство

$$\int_{\Omega} (fu)(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) (f\phi)(x) dx.$$

Поэтому, а также в силу указанной в предыдущем пункте связи между непрерывными функциями и распределениями, естественным является следующее определение.

Определение. Для любой обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$ положим

$$(\partial^\alpha u)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi), \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Если $f \in C^\infty(\Omega)$, то положим

$$(fu)(\phi) = u(f\phi), \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пример. Функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

называется функцией Хевисайда. Ее производная в смысле $D'(\mathbb{R})$ равна

$$\theta'(\phi) = -\theta(\phi') = - \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

Теорема 32 (Дифференцирование кусочно-гладких функций).

Пусть функция $u(x)$ определена на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, функция $u(x)$ дифференцируема при $x \in (\Omega \setminus \{x_0\})$. Если функция $v(x)$, равная $u'(x)$ при $x \neq x_0$, непрерывна на $\Omega \setminus \{x_0\}$ и интегрируема в некоторой окрестности x_0 , то пределы $u(x_0 \pm 0)$ существуют, и в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$u'(x) = v(x) + (u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0))\delta_{x_0}.$$

Доказательство. Если $x_0 < y$ и $[x_0, y] \subset \Omega$, то $u(x) = u(y) - \int_x^y v(t)dt$, откуда следует существование предела $u(x_0 + 0)$. Аналогично доказываются существование $u(x_0 - 0)$. Далее,

$$\begin{aligned} u'(\phi) &= -u(\phi') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(- \int_{|x-x_0|>\varepsilon} u(x)\phi'(x)dx \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (u(x_0 + \varepsilon)\phi(x_0 + \varepsilon) - u(x_0 - \varepsilon)\phi(x_0 - \varepsilon) + \\ &\quad + \int_{|x-x_0|>\varepsilon} v(x)\phi(x)dx). \end{aligned}$$

Отсюда, так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \phi(x_0 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \phi(x_0 - \varepsilon) = \phi(x_0)$, получаем доказываемое.

Определение. Сверткой $u * \phi$ распределения $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и пробной функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется функция $(u * \phi)(x) = u(\phi(x - \cdot))$, где правая часть обозначает результат применения u к функции $\phi(x - y)$ как функции от y .

Если $u \in C(\mathbb{R}^n)$, то это определение, очевидно, совпадает с (2.16). Оказывается, что все свойства свертки сохраняют силу и для свертки распределения с пробной функцией. Более того, справедливы следующие теоремы (доказательства их мы приводить не будем):

Теорема 33 Если $u \in D'(\Omega)$ и $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а также:

1. $\text{supp } (u * \phi) \subseteq \text{supp } u + \text{supp } \phi = \{x + y \mid x \in \text{supp } u, y \in \text{supp } \phi\}$.
2. $\partial^\alpha (u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha \phi)$.

Теорема 34 Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$.

Теорема 35 Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, то $u_\phi = u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u_\phi \xrightarrow{D'} u$ при $\text{supp } \phi \rightarrow \{0\}$.

Упражнения к пункту 3.

1. Найти $x\delta_0(x)$.
2. Найти $\frac{d}{dx}(|x|)$ в $D'(\mathbb{R})$.
3. Найти $\delta_0 * \phi$, где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Литература.

Л. Хермандер, „Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1: Теория распределений и анализ Фурье.“, гл.1, а также пп. 2.1, 2.2, 3.1, 4.1.

4.2.4 Преобразование Фурье обобщенных функций.

Начнем с пространства $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций (функций Шварца): **Определение.** Пространство $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций – это множество всех функций $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любых мультииндексов α, β имеет место соотношение:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_x^\alpha \phi(x)| < \infty. \quad (2.24)$$

Замечание 9 Заметим, что если $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\phi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $\phi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Далее для краткости будем писать \mathcal{P} вместо $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ее преобразованием Фурье называется ограниченная непрерывная функция $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, определенная формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx. \quad (2.25)$$

Обозначим $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$, где i – мнимая единица. В силу замечания 9, преобразование Фурье определено для всех быстро убывающих функций. Простейшие свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций позволяет установить следующая лемма.

Лемма 6 Преобразование Фурье $\mathcal{F}: \phi \rightarrow \widehat{\phi}$ непрерывно отображает \mathcal{P} в \mathcal{P} . При этом имеют место равенства:

$$\widehat{D_j \phi} = \xi_j \widehat{\phi}, \quad (2.26)$$

$$\widehat{x_j \phi} = -D_j \widehat{\phi}. \quad (2.27)$$

Доказательство. Заметим, что если $\phi \in \mathcal{P}$, то интеграл в (2.25) сходится равномерно по параметру ξ . Далее,

$$D^\alpha \widehat{\phi} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha \phi(x) dx,$$

при этом правая часть этого равенства определена и сходится равномерно по ξ . Таким образом, $\widehat{\phi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и имеет место равенство (2.27). Кроме того,

$$\begin{aligned} \xi^\beta D^\alpha \widehat{\phi} &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\beta e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha \phi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^\beta \partial_x^\beta (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) (-1)^{|\beta|} (-x)^\alpha \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по частям полученное выражение, имеем:

$$\xi^\beta D^\alpha \widehat{\phi} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} D^\beta ((-x)^\alpha \phi(x)) dx. \quad (2.28)$$

Интегрирование по частям не приводит к появлению внеинтегральных слагаемых, так как из (2.24) следует, что функция $\phi(x)$ и все ее производные при $|x| \rightarrow \infty$ стремятся к нулю быстрее, чем x в любой степени. Далее из (2.28) получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha \widehat{\phi}| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} D^\beta ((-x)^\alpha \phi(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^\beta ((-x)^\alpha \phi(x))| dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-n-1} dx \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|)^{n+1} |D^\beta ((-x)^\alpha \phi(x))| < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование Фурье непрерывно отображает \mathcal{P} в \mathcal{P} . Осталось заметить, что равенство (2.28) при $\alpha = 0$ дает (2.26). Лемма доказана.

Для доказательства формулы обращения Фурье нам потребуется также следующая техническая лемма.

Лемма 7 *Если линейное отображение $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям*

$$TD_j \phi = D_j T \phi, \quad T(x_j \phi(x)) = x_j T \phi(x), \quad (2.29)$$

то найдется константа c такая, что для любой функции $\phi \in \mathcal{P}$ имеет место равенство $T\phi = c\phi$.

Доказательство. Для любой $\phi(x) \in \mathcal{S}$ рассмотрим разложение $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$, $\phi_j = \alpha_j \phi$, где α_j — разбиение единицы, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_{1,2} \in C_0^\infty$, $\alpha_3 \in \mathcal{S}$. Тогда существуют точки y_j такие что $\phi_j(y_j) = 0$. Функции $\phi_j(x)$ представимы в виде

$$\begin{aligned} \phi_j(x) &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \int_0^1 \partial_{x_k} \phi_j(y_1^j + (x_1 - y_1^j)t, \dots, y_3^j + (x_3 - y_3^j)t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) \phi_k^j(x), \end{aligned}$$

где $\phi_k^j \in \mathcal{S}$. Отсюда, $T\phi_j(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k) T\phi_k^j(x)$, а значит, $(T\phi_j)(y_j) = 0$. Значит, найдется непрерывная функция $c_j(x)$, такая, что $T\phi_j(x) = c_j(x)\phi_j(x)$. Докажем, что c_j не зависят от j и, даже более, не зависят от ϕ_j . Рассмотрим сумму $\phi_1 + \phi_2$. Тогда, также как выше получим непрерывную функцию $c(x)$, такую, что $T(\phi_1 + \phi_2) = c(x)(\phi_1 + \phi_2)$. Но в тоже время имеем $T(\phi_1 + \phi_2) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. Отсюда $(c(x) - c_1(x))\phi_1 = -(c(x) - c_2(x))\phi_2$ и в областях $\text{supp } \phi_1 \setminus (\text{supp } \phi_1 \cap \text{supp } \phi_2)$ и $\text{supp } \phi_2 \setminus (\text{supp } \phi_1 \cap \text{supp } \phi_2)$ соответственно получим $c(x) = c_1(x)$ и $c(x) = c_2(x)$. Ниже мы покажем, что c, c_1, c_2 в области $\text{supp } \phi_1 \cap \text{supp } \phi_2$ есть решения дифференциального уравнения. Следовательно, и в этой области $c = c_1 = c_2$. Также доказывается, что $c = c_1 = c_3$. Отсюда следует, что $T\phi(x) = c(x)\phi(x)$. То, что $c(x)$ не зависит от ϕ доказывается также.

Теперь выберем $\phi \in \mathcal{P}$ так, что $\phi(x) \neq 0$ для всех x . Получим

$$D_j(T\phi) = TD_j\phi = (D_jc)\phi + c \cdot D_j(\phi).$$

Отсюда

$$D_jc(x) = \frac{T(D_j\phi) - c(x)(D_j\phi)(x)}{\phi(x)},$$

и тем самым $c(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Аналогично получаем, что $c(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Далее, $0 = D_jT\phi - TD_j\phi = (D_jc)\phi$, откуда следует, что все первые производные бесконечно гладкой функции $c(x)$ тождественно равны нулю, а значит, $c(x) = \text{const}$. Лемма доказана.

Теорема 36 (Формула обращения преобразования Фурье). Преобразование Фурье $\mathcal{F}: \phi \rightarrow \widehat{\phi}$ есть изоморфизм пространства \mathcal{P} на себя, обратный к которому задается формулой обращения Фурье

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \widehat{\phi}(\xi) d\xi. \quad (2.30)$$

Доказательство. В силу леммы 6 имеем: $\mathcal{F}^2: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Кроме того,

$$\mathcal{F}^2(x_j\phi) = \mathcal{F}(-D_j\widehat{\phi}) = -x_j\mathcal{F}\widehat{\phi} = -x_j\mathcal{F}^2\phi.$$

Аналогично, $\mathcal{F}^2D_j\phi = -D_j\mathcal{F}^2\phi$. Пусть $R\phi(x) = \phi(-x)$. Тогда для отображения $T = R\mathcal{F}^2$ выполнены условия (2.29). Следовательно, по лемме 7, $R\mathcal{F}^2\phi = c\phi$, где $c = \text{const}$ не зависит от ϕ . Для того, чтобы найти c , возьмем $\phi(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2) \in \mathcal{P}$. Для нее $(x_j + iD_j)\phi = 0$, и, сделав преобразование Фурье обеих частей этого равенства, получаем $(-D_j + i\xi_j)\widehat{\phi} = 0$, откуда $\widehat{\phi} = c_1\phi$, и $c_1 = \widehat{\phi}(0) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$. Таким образом, для данной функции ϕ имеем $R\mathcal{F}^2\phi = c_1^2\phi$, а значит, $c = c_1^2 = (2\pi)^n$. Теорема доказана.

Отметим также следующие важные свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций.

Теорема 37 Для любых функций $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ имеют место равенства:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\widehat{\psi}(x)dx, \quad (2.31)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\psi}(x)dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\overline{\widehat{\psi}}(x)dx, \quad (2.32)$$

$$\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}, \widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi}. \quad (2.33)$$

Равенство (2.32) называется формулой Парсеваля.

Доказательство. Свойства (2.31) и (2.33) проверяются прямым вычислением. Для доказательства свойства (2.32) положим $\chi = (2\pi)^{-n}\overline{\widehat{\psi}}$. Тогда

$$\widehat{\chi}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(x)e^{i\langle x, \xi \rangle} dx = \psi(x).$$

Отсюда и из равенства (2.31) следует требуемое. Для доказательства второго равенства (2.33) заметим, что

$$\mathcal{F}(\widehat{\phi\psi}) = \mathcal{F}^2(\phi\psi) = (2\pi)^n\phi(-x)\psi(-x),$$

и в силу (2.33)

$$\mathcal{F}(\widehat{\phi} * \widehat{\psi}) = \mathcal{F}(\widehat{\phi})\mathcal{F}(\widehat{\psi}) = (2\pi)^n\phi(-x)(2\pi)^n\psi(-x).$$

Теорема доказана.

Упражнения к пункту 1.

1. Доказать замечание 9.
2. Проверить прямым вычислением равенство (2.31).
3. Проверить прямым вычислением равенство (2.33).

Теперь перейдем к обобщенным функциям умеренного роста и их преобразованию Фурье. Заметим, что система полунорм

$$p_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_x^\alpha \phi(x)|$$

задает в пространстве быстро убывающих функций $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ топологию, превращающую \mathcal{P} в пространство Фреше. Определим обобщенные функции умеренного роста по аналогии со введенным в предыдущей главе обобщенными функциями, взяв в качестве пространства пробных функций пространство \mathcal{P} .

Определение. Непрерывные линейные функционалы на \mathcal{P} называются обобщенными функциями умеренного роста (распределениями умеренного роста). Множество всех обобщенных функций умеренного роста будем обозначать \mathcal{P}' .

Из замечания 9 следует, что любому функционалу $u \in \mathcal{P}'$ можно поставить в соответствие функционал $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ по следующему правилу: $u(\phi) = v(\phi) \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Более того, имеет место следующее утверждение.

Лемма 8 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *плотно в \mathcal{P} .*

Доказательство. Пусть $\phi(x) \in \mathcal{P}$ – произвольная. Выберем $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\psi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x)\psi(\varepsilon x)$. Тогда $\phi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а так как $\phi_\varepsilon(x) - \phi(x) = \phi(x)(\psi(\varepsilon x) - 1) = 0$ при $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$, то $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$ в \mathcal{P} при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Как следствие из этой леммы, получаем, что пространство \mathcal{P}' можно отождествить с соответствующим подпространством в $D'(\mathbb{R}^n)$. Имеет место также следующее утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Утверждение 11 *Для любого $p \geq 1$ если $\phi(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то $\phi \in \mathcal{P}'$.*

Определение. Преобразованием Фурье обобщенной функции $u \in \mathcal{P}$ называется обобщенная функция \hat{u} , определяемая формулой $\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi})$.

Заметим, что в силу леммы 6: $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, а значит, $\mathcal{F}: \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}'$.

Теорема 38 Преобразование Фурье осуществляет изоморфизм пространства \mathcal{P}' со слабой топологией на себя, и имеет место формула обращения Фурье (2.30) в следующем виде: $\mathcal{F}(\widehat{u})(\phi) = (2\pi)^n u(R\phi)$.

Доказательство. В силу теоремы 36 имеет место равенство $\mathcal{F}(\widehat{\phi}) = (2\pi)^n R\phi$ для любой функции $\phi \in \mathcal{P}$, откуда следует формула обращения Фурье.

Теорема 39 Если $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$, и формула Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \bar{\psi}(x) dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x) \overline{\widehat{\psi}(x)} dx \quad (2.34)$$

имеет место для всех функций $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$, то найдется последовательность $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $u_j \rightarrow u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $u_j \in \mathcal{P}$, и в силу теоремы 37 получаем

$$\|\widehat{u}_j - \widehat{u}_k\|_{L_2}^2 = (2\pi)^n \|u_j - u_k\|_{L_2}^2 \rightarrow 0$$

при $j, k \rightarrow \infty$. Отсюда, так как пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ – полное, получаем, что найдется $U \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\widehat{u}_j \rightarrow U$ в L_2 . В силу непрерывности преобразования Фурье отсюда следует, что $\mathcal{F}(u) = U$. Далее, обе части равенства (2.34) – непрерывные функции от ϕ, ψ в L_2 -норме, а следовательно, равенство (2.34) имеет место для всех $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана.

Упражнение к пункту 2. Проверить, что в обозначениях леммы 8 для любых мультииндексов α, β верно $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_x^\alpha (\phi_\varepsilon(x) - \phi(x))| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.2.5 Пространства Соболева.

Определение. Пусть $s \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$ называется пространство обобщенных функций $u \in \mathcal{P}'$ таких, что конечна норма

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Заметим, что при $s = 0$ пространство $H^0(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^n)$, и с ростом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ сужается. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Разлагая многочлен $(1 + |\xi|^2)^s$ в сумму степеней ξ_j^2 , получаем, в силу свойств преобразования Фурье, что

$$\|u\|_s^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} C_\alpha \|D^\alpha u\|_{L_2}^2.$$

Отсюда естественным образом вытекает следующее определение.

Определение. Пусть Ω – открытая область. Тогда пространством Соболева $H^s(\Omega)$ назовем пространство функций $\phi(x) \in L_2(\Omega)$ таких, что для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leq s$ обобщенная производная функции $\phi(x)$ порядка α – функция $\partial_x^\alpha \phi$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.

Замечание 10 Вообще говоря, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то не во всех случаях функцию $u \in H^s(\Omega_1)$ можно продолжить до функции $v \in H^s(\Omega_2)$. Это связано с тем, что функция $u(x)$ может „плохо“ себя вести в окрестности границы области Ω_1 .

Весьма важную роль играет следующая теорема.

Теорема 40 (теорема вложения) Пусть $s > \frac{n}{2}$. Тогда если $u(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, то $u(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$ – фиксированная точка. Тогда

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x^0)| &= |(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x^0, \xi \rangle} (e^{i\langle x-x^0, \xi \rangle} - 1) \widehat{u}(\xi) d\xi| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\xi)| \cdot \frac{|e^{i\langle x-x^0, \xi \rangle} - 1|}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \leq \\ &\leq \text{const} \|u\|_s \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\langle x-x^0, \xi \rangle} - 1|^2}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $s > \frac{n}{2}$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\langle x-x^0, \xi \rangle} - 1|^2}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \leq 4 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi < \infty,$$

т.е. этот интеграл сходится равномерно. Следовательно, можно совершить предельный переход по параметру $x - x^0 \rightarrow 0$, переходя к пределу под знаком интеграла. Но при этом указанный интеграл стремится к нулю, а значит, $|u(x) - u(x^0)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^0$, т.е. $u(x)$ непрерывна в точке x^0 . Теорема доказана.

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Заметим, что граница этой области $\partial\Omega$ имеет нулевую n -мерную меру Лебега. В случае, когда функция $u(x)$ принадлежит пространству Соболева $H^1(\mathbb{R}^n)$, она, вообще говоря, не является непрерывной и определена п.в., а потому выражение „ограничение $u(x)$ на $\partial\Omega$ “ не определено. Для того, чтобы определить значения функции $u(x)$ на $\partial\Omega$ используется следующая теорема.

Теорема 41 (о следах) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1 . Тогда существует ограниченный линейный оператор $T: H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ такой, что:

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$, если $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
2. $\|Tu\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$, где константа C зависит только от геометрии области Ω .

Определение. Функция Tu называется следом функции u на $\partial\Omega$.

Рассмотрим теперь все такие функции из $H^s(\Omega)$, след которых на границе области Ω равен нулю.

Определение. Пространство $H_0^s(\Omega)$ – это замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^s(\Omega)$.

Имеет место следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 42 (о функциях с нулевым следом) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1 . Пусть $u(x) \in H^1(\Omega)$. Тогда $u \in H_0^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $Tu = 0$ на $\partial\Omega$.

Упражнения к пункту 3.

При каких значениях параметров $a, b \in \mathbb{R}$ принадлежат пространству $H^1((-1, 1))$ следующие функции: а) $u(x) = |x|^a$, б) $u(x) = (\ln(|x|))^b$, в) $u(x) = |x|^a(\ln(|x|))^b$; Доказать, что если $s > \frac{n}{2}$ и $u(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{u} \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Литература.

Л. Хермандер, „Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными“, Т.1, гл.7

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, гл.5

4.3 Неравенство Фридрикса.

При изучении обобщенных решений краевых задач важную роль играют свойства функций из пространств Соболева. Одним из важнейших подобных свойств является возможность перейти к эквивалентной норме в некоторых случаях. В этом и следующих разделах знаком $\|f\|$ будем для краткости обозначать норму функции $f(x)$ в $L_2(\Omega)$.

Теорема 43 (Неравенство Фридрикса.) Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n . Тогда найдется такая константа $C > 0$, зависящая только от Ω , что для любой функции $f(x) \in H_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|f\|^2 \leq C \|\nabla f\|^2. \quad (3.35)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $H_0^1(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме H^1 . Докажем сначала неравенство (3.35) для функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Для этого заметим, что в силу ограниченности Ω найдется такой куб $Q \in \mathbb{R}^n$, что $\Omega \subset Q$, а ребра Q параллельны координатным осям. Пусть a – длина ребра куба Q . Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин куба Q совпадает с началом отсчета, и координаты всех точек Q неотрицательны (иначе сделаем замену координат, что не изменит ни градиента, ни L_2 -нормы функции).

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Продолжим ее нулем на $Q \setminus \Omega$. Заметим, что полученная функция (которую мы также будем обозначать $f(x)$) принадлежит пространству $C_0^\infty(Q)$. Временно зафиксируем $x \in Q$. В силу того, что $f(x) \in C_0^\infty(Q)$, имеет место **интегральное представление**

$$f(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(y, x_2, \dots, x_n) dy. \quad (3.36)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(y, x_2, \dots, x_n) \right| dy \leq \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(y, x_2, \dots, x_n) \right| dy \leq \\ &\leq \sqrt{a} \left(\int_0^a \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y, x_2, \dots, x_n) \right)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы воспользовались неравенством Коши-Буняковского. Далее, так как

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 \leq |\nabla f|^2,$$

то

$$|f(x)|^2 \leq a \int_0^a |\nabla f|^2(y, x_2, \dots, x_n) dy. \quad (3.37)$$

Интегрируя неравенство (3.37) по всем $x \in Q$, получаем

$$\int_Q |f(x)|^2 dx \leq a \int_0^a \left(\int_{Q'} \int_0^a |\nabla f|^2(y, x_2, \dots, x_n) dy dx_2 \dots dx_n \right) dx_1,$$

где Q' – проекция куба Q на гиперповерхность $x_1 = \text{const}$. Вычисляя явно интеграл по x_1 в правой части последнего неравенства, получаем, что для всех $f(x) \in C_0^\infty(Q)$ имеет место неравенство

$$\|f\|^2 \leq a^2 \|\nabla f\|^2,$$

которое совпадает с (3.35), причем $C = a^2$. Таким образом, для всех функций из $C_0^\infty(\Omega)$ неравенство Фридрикса доказано.

Пусть теперь $f(x) \in H_0^1(\Omega)$. Тогда найдется последовательность $f_k(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что f_k сходятся к f в H^1 . В силу того, что норма – непрерывный функционал, а для всех f_k неравенство (3.35) выполнено, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ получаем, что неравенство Фридрикса имеет место и для всех $f(x) \in H_0^1(\Omega)$. Теорема доказана.

Следствие 5 Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n . Тогда нормы

$$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + \|\nabla f\|^2$$

и

$$\|f\|_* = \|\nabla f\|$$

эквивалентны в $H_0^1(\Omega)$.

Замечание 11 Для функций из $H^1(\Omega)$ неравенство Фридрикса неверно: достаточно рассмотреть $f(x) = 1$.

Упражнения:

1. Доказать, что для $\Omega = \{x_1 > 0, x_2 > 0, x \in \mathbb{R}^2\}$ неравенство Фридрихса неверно ни для каких C . Указание: рассмотрите неотрицательные функции из $C_0^\infty(\Omega)$, носитель которых неограниченно растет.
2. Доказать, что для $\Omega = \{0 < x_1 < a, x \in \mathbb{R}^2\}$ неравенство Фридрихса выполнено. Указание: воспользуйтесь тем, что интегральное представление (3.36) для такой области Ω имеет место.

4.4 Теорема Рисса для гильбертовых пространств.

Напомним следующее определение.

Определение 1 Полное линейное пространство V со скалярным произведением называется **гильбертовым пространством**.

Скалярное произведение в V будем обозначать угловыми скобками (т.е. $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение элементов x и y). Норму в V , соответствующую скалярному произведению, будем обозначать так: $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Замечание 12 (равенство параллелограмма) Из свойств скалярного произведения сразу следует, что для любых элементов $x, y \in V$ имеет место равенство

$$|x - y|^2 + |x + y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2. \quad (4.38)$$

Докажем сначала одно важное утверждение о геометрии гильбертовых пространств.

Теорема 44 (Теорема о перпендикуляре.) Пусть V – гильбертово пространство, а L – замкнутое линейное подпространство в V . Тогда для любого вектора $x \in V$ существуют единственные $y \in L$ – проекция и $z \perp L$ – перпендикуляр такие, что $x = y + z$. При этом

$$\forall v \in L, v \neq y : |z| = |x - y| < |x - v|. \quad (4.39)$$

Доказательство. Если $x \in L$, то положим $y = x, z = 0$. Нетрудно видеть, что для указанных проекции и перпендикуляра утверждение теоремы выполнено.

Пусть $x \notin L$. Тогда расстояние $\delta = \inf_{v \in L} \{ |x - v| \} > 0$. Тогда найдется последовательность элементов $v_k \in L$ таких, что $|v_k - x|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{k}$. В силу равенства параллелограмма (4.38) отсюда следует, что

$$|x - v_k|^2 + |x - v_m|^2 = 2\left|\frac{1}{2}(v_k - v_m)\right|^2 + 2\left|x - \frac{1}{2}(v_k + v_m)\right|^2.$$

Так как $\frac{1}{2}(v_k + v_m) \in L$, то $|x - \frac{1}{2}(v_k + v_m)| \geq \delta$, откуда и из предыдущего равенства следует, что

$$\frac{1}{2}|v_k - v_m|^2 \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{m},$$

а значит, последовательность $\{v_k\}$ – фундаментальная. В силу полноты V и замкнутости L отсюда следует, что найдется $y \in L$ такое, что $v_k \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$. В силу непрерывности нормы $|x - y| = \delta$. Обозначим $z = x - y$ и докажем, что $z \perp L$. Пусть $v \in L$. Без ограничения общности можно считать, что $|v| = 1$ (иначе для $v \neq 0$ перейдем к $w = \frac{v}{|v|}$, а для $v = 0$ верно $z \perp v$). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\delta^2 = |z|^2 \leq |z - \varepsilon v|^2 = |z|^2 - 2\varepsilon \langle z, v \rangle + \varepsilon^2 |v|^2,$$

откуда следует, что

$$-2\varepsilon \langle z, v \rangle + \varepsilon^2 |v|^2 \geq 0,$$

а значит,

$$\langle v, z \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для вектора $z + \varepsilon v$ получаем, что $-\langle v, z \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда в силу произвольности ε следует, что $\langle v, z \rangle = 0$, т.е. $z \perp v$.

Единственность проекции $y \in L$ вытекает из равенства параллелограмма.

Теорема доказана.

Пусть теперь f – линейный ограниченный функционал на V . Обозначим $\text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ – ядро f .

Утверждение 12 $\text{Ker}(f)$ – замкнутое линейное подпространство в V .

Доказательство. То, что ядро является линейным подпространством, проверяется впрямую. Пусть $v_k \in \text{Ker}(f)$ образуют фундаментальную

последовательность. В силу полноты V найдется $v_* \in V$ такое, что $v_k \rightarrow v_*$. Тогда в силу ограниченности f имеем

$$|f(v_k) - f(v_*)| = |f(v_k - v_*)| \leq C_f |v_k - v_*|,$$

т.е. $f(v_k)$ – также фундаментальная последовательность, сходящаяся к $f(v_*)$. Осталось заметить, что $f(v_k) = 0$, откуда следует, что $f(v_*) = 0$, а значит, $v_* \in \text{Ker}(f)$.

Опишем теперь, какова структура всех линейных ограниченных функционалов на гильбертовом пространстве.

Теорема 45 (Теорема Рисса.) Пусть f – линейный ограниченный функционал на гильбертовом пространстве V . Тогда существует вектор $h \in V$ такой, что

$$\forall x \in V : f(x) = \langle x, h \rangle. \quad (4.40)$$

Доказательство. Пусть $L = \text{Ker}(f)$, $M = L^\perp = \{v \in V \mid v \perp L\}$ – ортогональное дополнение к L . Заметим, что $0 \in M$.

Пусть сначала $M = \{0\}$. Докажем, что тогда $L = V$. Предположим противное. Пусть $x \in V$, $x \notin L$. Тогда по теореме о перпендикуляре 44 найдутся $y \in L$ и $z \perp L$ такие, что $x = y + z$. При этом, так как $x \notin L$, то $z \neq 0$. Но тогда $z \in M$, $z \neq 0$, что противоречит предположению, что $M = \{0\}$. Следовательно, если $M = \{0\}$, то $L = V$. Но тогда полагая $h = 0$ получаем, что равенство (4.40) выполнено для всех $x \in V$.

Пусть теперь $M \neq \{0\}$. Тогда найдется $h_0 \in M \setminus \{0\}$. Заметим, что если $h_1 \in M$, то $w = h_1 - \frac{f(h_1)}{f(h_0)} h_0 \in M$, но $f(w) = 0$, а значит, $w \in L$. Отсюда в силу теоремы о перпендикуляре 44 получаем, что $w = 0$. Значит, векторы h_1 и h_0 линейно зависимы, т.е. $\dim M = 1$. В силу теоремы о перпендикуляре 44 отсюда следует, что любой вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде $x = y + \alpha h_0$, где $y \in L$. Значит, $f(x) = \alpha f(h_0)$. Отсюда, полагая $h = \frac{f(h_0)}{|h_0|^2} h_0$, получаем, что для указанного вектора h имеет место равенство (4.40). Теорема доказана.

Упражнения:

1. Доказать равенство параллелограмма (4.38).
2. Доказать единственность разложения вектора в сумму проекции и перпендикуляра.

4.5 Обобщенная задача Дирихле для уравнения Пуассона.

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n . Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Зададимся вопросом о том, какому функциональному пространству должна принадлежать функция $f(x)$, для того, чтобы задача (5.41) была естественной. Пусть сначала задача (5.41) имеет классическое решение, т.е. $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$. Тогда, домножая уравнение Пуассона на $v \in D(\Omega)$, интегрируя обе части равенства по Ω и перебрасывая производные на v , получим для левой части

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x))v(x)dx = - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \partial_j u(x) \partial_j v(x) dx.$$

Обозначим

$$[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \partial_j u(x) \partial_j v(x) dx.$$

Тогда уравнение Пуассона переписется в виде

$$[u, v] = - \langle f, v \rangle, \quad (5.42)$$

где угловыми скобками обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Заметим теперь, что обе части равенства (5.42) линейны и непрерывны как функционалы от v по норме $\|\cdot\|_1$ пространства $H^1(\Omega)$. Следовательно, если (5.42) выполнено для всех $v \in D(\Omega)$, то это равенство верно для всех v из замыкания $D(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_1$, т.е. для всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Краевое условие $u|_{\partial\Omega} = 0$ заменим включением $u \in H_0^1(\Omega)$, при котором левая часть (5.42) имеет смысл для всех $v \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом, получаем **обобщенную задачу Дирихле для уравнения Пуассона:**

$$\begin{cases} [u, v] = - \langle f, v \rangle, & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.43)$$

Заметим, что если решение обобщенной задачи (5.43) – функция $u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, то можно проделать интегрирование по частям и получить задачу (5.41), т.е. гладкое решение обобщенной задачи Дирихле является

классическим решением. При этом, постановка (5.43) имеет смысл для всех $f(x) \in L_2(\Omega)$.

С помощью теоремы Рисса и неравенства Фридрикса мы получим существование и единственность решения обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Кроме того, техника, используемая для доказательства этой теоремы, может быть использована и для доказательства существования (и единственности) решения многих других линейных задач математической физики.

Теорема 46 *Обобщенное решение задачи (5.43) существует и единственно.*

Доказательство. Рассмотрим правую часть как функционал на $v \in H_0^1(\Omega)$. Его линейность очевидна, а непрерывность следует из неравенства Коши-Буняковского и эквивалентности нормы $\|\cdot\|_1$ и нормы $\|\cdot\|_*$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$:

$$|-\langle f, v \rangle| \leq \|f\| \cdot \|v\| \leq \|f\| \cdot \|v\|_1 \leq C \|f\| \cdot \|v\|_*.$$

По теореме Рисса 45 существует единственный элемент $u \in H_0^1(\Omega)$ такой, что $-\langle f, v \rangle = [v, u]$, что и доказывает существование и единственность решения задачи (5.43).

4.6 Коротковолновые асимптотики и функция Грина

Задача этой главы на примере одномерного уравнения Шредингера „Посмотреть, что будет за фокальной точкой“? Вначале на модельном уравнении (уравнение Шредингера с гармоническим осциллятором) показывается, каким образом можно построить коротковолновую асимптотику для функции Грина, и каким образом можно осуществить переход через фокальную точку с помощью h -преобразования Фурье. Затем (в последнем параграфе этой главы) описывается метод канонического оператора Маслова для одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $U(x)$ из некоторого специального класса.

4.6.1 Напоминание: общая структура метода коротковолновых асимптотик для одномерного уравнения Шредингера.

Рассмотрим коротковолновую асимптотику для решения задачи Коши для уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi, \\ \psi|_{t=0} = \phi_0(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0(x)\right). \end{cases} \quad (6.44)$$

Тогда для $\psi(t, x) = \phi(t, x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(t, x)\right)$ имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(x) = 0, \\ S|_{t=0} = S_0(x) \end{cases} \quad (6.45)$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \phi = 0, \\ \phi|_{t=0} = \phi_0(x). \end{cases} \quad (6.46)$$

Система характеристик для задачи Коши (6.45) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \quad x|_{t=0} = \xi, \\ \dot{p} = -U(x), \quad p|_{t=0} = S_0(\xi), \\ \dot{z} = \frac{1}{2} p^2 - U(x), \quad z|_{t=0} = S_0(\xi). \end{cases} \quad (6.47)$$

Система характеристик для задачи Коши (6.46) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \quad t|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad x|_{\tau=0} = \xi, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} z, \quad z|_{t=0} = \phi_0(\xi). \end{cases} \quad (6.48)$$

Заметим, что в силу (6.47) имеем $\frac{\partial S}{\partial x} = p$, откуда и из того, что в задаче (6.48) частью решения является $t = \tau$ получаем, что якобианы $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ в задачах (6.47) и (6.48) совпадают. Вспомним теперь, что все определенные в окрестности нуля решения (6.46) описываются формулой

$$\phi(t, x) = \frac{\phi_0(\xi)}{\sqrt{\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)}} \Bigg|_{\xi=K(t, x)}, \quad (6.49)$$

где $K(t, x)$ – решение алгебраического уравнения

$$X(t, \xi) = x, \quad (6.50)$$

а функция $X(t, \xi)$ – решение задачи Коши (6.47). Более того, окончательно имеем

$$S(t, x) = (S_0(\xi) + \int_0^t (P^2(\tau, \xi) - U(X(\tau, \xi))) d\tau)|_{\xi=K(t,x)}, \quad (6.51)$$

где функции $P(t, \xi)$ и $X(t, \xi)$ – решения (6.47).

4.6.2 Модельный пример: уравнение Шредингера для гармонического осциллятора.

Для дальнейшего изучения свойств решения задачи Коши (6.44) рассмотрим следующий важный модельный пример:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2} \psi, \\ \psi|_{t=0} = \phi_0(x) e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)}. \end{cases} \quad (6.52)$$

Пусть сначала функция $S_0(x)$ такая, что

$$S_0''(x) \neq 0 \text{ при } x \in \text{supp } \phi_0 \quad (6.53)$$

Тогда решение системы характеристик (6.47) имеет вид:

$$X = \xi \cos t + p_0(\xi) \sin t, \quad P = -\xi \sin t + p_0(\xi) \cos t, \quad p_0(\xi) = S_0(\xi),$$

и якобиан $J = \cos t + S_0''(\xi) \sin t$ обращается в ноль при t таких, что

$$\text{ctg } t = -S_0''(\xi).$$

В частности, если $S_0''(\xi) > 0$, то $J \neq 0$ при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, а если $S_0''(\xi) < 0$, то $J \neq 0$ при $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Пусть, для определенности, $S_0(\xi) > 0$, $t = \frac{\pi}{2}$. Тогда $S(\frac{\pi}{2}, x) = (S_0(\xi) - \xi p_0(\xi))|_{\xi=\xi(q)} = \Phi(q)$, $J = S_0''(\xi(q))$, где $\xi(q)$ – решение алгебраического уравнения $p_0(\xi) = q$. Отсюда окончательно получаем

$$\phi\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = \frac{\phi_0(\xi(q))}{\sqrt{S_0''(\xi(q))}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Phi(q)\right). \quad (6.54)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $S_0(x) = k(x - y) + \frac{b}{2}(x - y)^2$. В этом случае имеем

$$x = \xi \cos t + (b(\xi - y) + k) \sin t, \quad \xi = \frac{x - (k - by) \sin t}{\cos t + b \sin t},$$

и с помощью формул (6.53), (6.54) получаем

$$S(t, x) = \frac{2x(k - by) + (b(x^2 + y^2) - 2ky) \cos t - (x^2 + k^2) \sin t}{2(\cos t + b \sin t)},$$

и окончательно

$$\psi(t, x) = \frac{\phi_0(\xi(t, x))}{\sqrt{\cos t + b \sin t}} \exp\left(\frac{i}{h} S(t, x)\right). \quad (6.55)$$

Важным для дальнейшего исследования является тот факт, что при $\phi_0 = 1$ формула (6.55) дает точное решение задачи Коши (6.44) при всех t таких, что $\operatorname{ctg} t \neq b$.

4.6.3 Функция Грина задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором.

Построим обобщенную функцию $G(x, y, t)$ такую, что $G(x, y, 0) = \delta(x - y)$ и G – обобщенное решение уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2} \psi.$$

Заметим, что тогда решение задачи Коши (6.52) может быть записано в виде

$$\psi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, t) \psi_0(y) dy.$$

Нам также понадобится следующее определение.

Определение. h -преобразованием Фурье функции $\phi(x) \in \mathcal{P}$ будем называть преобразование, заданное равенством

$$(\mathcal{F}_{x \rightarrow k}^h \phi(x))(k) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-\frac{ikx}{h}} dx.$$

Заметим, что $h = 1$ дает определение обычного преобразования Фурье быстро убывающих функций. Таким же образом, как это было сделано для обычного преобразования Фурье, определим h -преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста. Заметим, что имеют место равенства

$$(\mathcal{F}_{x \rightarrow k}^h \delta(x - y))(k) = \exp(-\frac{i}{h}ky), \quad (6.56)$$

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{i}{h}k(x - y))dk. \quad (6.57)$$

Покажем теперь, что функцию Грина для задачи Коши (6.52) мы можем вычислить точно. Для этого положим в рассмотренном выше примере

$$b = 0, \quad \phi_0(x) = 1, \quad S_0(x) = k(x - y).$$

При этом начальные данные для соответствующей задачи Коши будут иметь вид

$$\psi|_{t=0} = \exp(\frac{i}{h}k(x - y)).$$

Соответствующее этим начальным данным точное решение, задаваемое формулой (6.55), имеет вид:

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\cos t}} \exp\left(\frac{i}{h} \frac{2kx - 2ky \cos t - (x^2 + k^2) \sin t}{2 \cos t}\right), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Заметим, что если домножить начальные данные на $\frac{1}{2\pi h}$ и проинтегрировать по $k \in \mathbb{R}$, то в силу (6.57) получится $\delta(x - y)$. Так как уравнение (6.52) линейно, то интеграл по параметру k от решений также будет решением, соответствующим начальным данным, проинтегрированным по тому же параметру. Тем самым, для того, чтобы построить функцию Грина, необходимо домножить указанное выше точное решение на $\frac{1}{2\pi h}$ и проинтегрировать по параметру $k \in \mathbb{R}$. В результате получим:

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi h \cos t} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{h} \left(\frac{kx}{\cos t} - ky - \frac{1}{2}(x^2 + k^2) \operatorname{tg} t\right)\right) dk. \quad (6.58)$$

Так как фаза в (6.58) Ц- квадратичный полином по k , то интеграл в (6.58) вычисляется в явном виде. Для этого выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} & \frac{kx}{\cos t} - ky - \frac{1}{2}(x^2 + k^2) \operatorname{tg} t = \\ & = -\frac{1}{2} \left(k\sqrt{\operatorname{tg} t} - \left(\frac{x}{\cos t} - y \right) \sqrt{\operatorname{ctg} t} \right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} \operatorname{ctg} t - \frac{xy}{\sin t}. \end{aligned}$$

Сделаем теперь в (6.58) замену под знаком интеграла: положим

$$z_1 = k\sqrt{|\operatorname{tg} t|} - \frac{x}{\cos t} \sqrt{|\operatorname{ctg} t|} + y\sqrt{|\operatorname{ctg} t|}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi h \sqrt{|\sin t|}} \exp \left(\frac{i}{h \sin t} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \cos t - xy \right) \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{i}{2h} \operatorname{sign}(\operatorname{tg} t) z_1^2 \right) dz_1, \end{aligned}$$

и, сделав замену $z = \frac{z_1}{\sqrt{h}}$, получаем окончательно

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{h} |\sin t|} \exp \left(\frac{i}{h \sin t} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \cos t - xy \right) \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{i}{2} \operatorname{sign}(\operatorname{tg} t) z^2 \right) dz. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Таким образом, вычисление интеграла в правой части равенства (6.58) свелось к вычислению интегралов

$$I^\pm = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\pm \frac{iz^2}{2} \right) dz. \quad (6.60)$$

4.6.4 Вычисление интегралов I^\pm и явный вид функции Грина.

Заметим, что $I^- = \overline{I^+}$. Кроме того,

$$I^+ = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz = 2 \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz.$$

Следовательно, достаточно вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz.$$

Так как функция $\exp\left(\frac{iz^2}{2}\right)$ – аналитическая функция на комплексной плоскости, то для любого замкнутого контура Γ

$$\oint_{\Gamma} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz = 0.$$

Пусть R – положительный параметр, который будет выбран далее. Возьмем контур $\Gamma_R = \{z = x, x \in [0, R]\} \cup \{z = Re^{i\phi}, \phi \in [0, \frac{\pi}{4}]\} \cup \{z = se^{i\frac{\pi}{4}}, s \in [R, 0]\}$. В силу сказанного ранее,

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Gamma_R} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz = \int_0^R \exp\left(\frac{ix^2}{2}\right) dx + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right) iR e^{i\phi} d\phi + \int_R^0 e^{i\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds. \end{aligned}$$

Далее, по определению

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right) dz =$$

$$= - \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right) iRe^{i\phi} d\phi + \int_R^0 e^{i\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds \right). \quad (6.61)$$

Докажем, что первое из слагаемых в (6.61) равняется нулю. Для этого преобразуем сначала подынтегральное выражение:

$$e^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right) = e^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2}{2} \cos 2\phi - \frac{R^2}{2} \sin 2\phi\right).$$

Далее положим $\phi_* \in (0, \frac{\pi}{4})$ – параметр, который будет выбран далее. Заметим, что при $\phi \in [0, \phi_*]$ в силу положительности $\sin 2\phi$ имеет место неравенство

$$|Re^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right)| = R \exp\left(-\frac{R^2}{2} \sin 2\phi\right) \leq R.$$

Если же $\phi \in [\phi_*, \frac{\pi}{4}]$, то при достаточно малом ϕ_* имеем

$$\begin{aligned} |Re^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right)| &\leq R \exp\left(-\frac{R^2}{2} \sin 2\phi_*\right) = R \exp(-R^2 \sin \phi_* \cos \phi_*) \leq \\ &\leq R \exp(-R^2 \phi_* \cos^2 \phi_*) \leq R \exp\left(-\frac{R^2 \phi_*}{2}\right). \end{aligned}$$

В этом случае

$$\left| \int_{\phi_*}^{\frac{\pi}{4}} iRe^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right) d\phi \right| \leq \int_{\phi_*}^{\frac{\pi}{4}} R \exp\left(-\frac{R^2 \phi_*}{2}\right) d\phi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty,$$

и первое слагаемое в (6.61) оценивается сверху суммой:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} iRe^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right) d\phi \right| \leq \left| \int_{\phi_*}^{\frac{\pi}{4}} iRe^{i\phi} \exp\left(\frac{iR^2 e^{2i\phi}}{2}\right) d\phi \right| + R\phi_*.$$

Осталось выбрать $\phi_* = \min\left\{\frac{\pi}{8}, R^{-\frac{3}{2}}\right\}$. Таким образом, первое слагаемое в (6.61) стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$, а значит,

$$I^+ = 2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{\frac{ix^2}{2}} dx = 2e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{2\pi}.$$

Подставляя выражение для I^+ в равенство (6.59), получаем явный вид функции Грина для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором:

$$G(x, y, t) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \operatorname{tg} t)}{\sqrt{2\pi h |\sin t|}} \exp\left(\frac{i}{h \sin t} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \cos t - xy\right)\right). \quad (6.62)$$

Замечание 13 Пусть $\psi_0(x)$ – начальные данные для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором. Тогда

$$\psi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, t) \psi_0(y) dy.$$

Положим $t = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm p$. Тогда

$$\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}, \pm p\right) = \frac{e^{\mp\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ipy}{h}} \psi_0(y) dy = \sqrt{2\pi h} e^{\mp\frac{i\pi}{4}} (\mathcal{F}_{x \rightarrow p}^h \psi_0)(p),$$

т.е. вычисление h -преобразования Фурье от функции ψ_0 может быть сведено к решению задачи Коши (6.52) с соответствующими начальными данными.

4.6.5 Фокальные точки и переход через них с помощью преобразования Фурье.

Формула (6.62) получена для $0 < |t| < \pi$. В моменты времени $t = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функция Грина $G(x, y, t)$ имеет особенности. Покажем, что эти особенности являются фокальными точками. Очевидно, что (6.62) \mathcal{D} -коротковолновая асимптотика с фазой

$$S(t, x) = \frac{1}{\sin t} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} - xy\right) \quad (6.63)$$

и амплитудой

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{|\sin t|}} \quad (6.64)$$

с точностью до постоянного множителя. Пусть $t = \tau + t_0$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{x^2}{2} \psi, \\ \psi|_{\tau=0} = \phi(t_0) e^{-\frac{i}{h} S(t_0, x)}. \end{cases} \quad (6.65)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P &= -\xi \sin(t - t_0) + \frac{1}{\sin t_0} (\xi \cos t_0 - y) \cos(t - t_0), \quad X(\xi, t) = \\ &= \xi \cos(t - t_0) + \frac{1}{\sin t_0} (\xi \cos t_0 - y) \sin(t - t_0), \end{aligned}$$

и якобиан

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \cos(t - t_0) + \frac{\cos t_0 \sin(t - t_0)}{\sin t_0} = \frac{\sin t}{\sin t_0}$$

обращается в ноль при $t = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. точки $t = \pi k$ – фокальные. Нетрудно убедиться в том, что коротковолновая асимптотика для задачи (6.65) дает (6.63), (6.64).

Попытаемся теперь расширить область определения функции Грина $G(x, y, t)$ за точку $t = \pi$. Для этого воспользуемся h -преобразованием Фурье и замечанием 13. Вычислим явно h -преобразование Фурье от $G(x, y, t)$ по x . Имеем

$$\tilde{G}(p, y, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow p}^h(G)(p, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{h} px} G(x, y, t) dx,$$

и выписывая правую часть явно, получаем

$$\tilde{G}(p, y, t) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign} \text{tg} t}}{2\pi h \sqrt{|\sin t|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{h} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \text{ctg} t - \frac{xy}{\sin t} - px\right)\right) dx. \quad (6.66)$$

При $t \neq \frac{\pi}{2}$ правая часть (6.66) Ц-интеграл с квадратичной фазой, который может быть вычислен аналогично (6.58). В итоге получим

$$\tilde{G}(p, y, t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}(1 - \text{sign} \cos t)}}{\sqrt{2\pi h |\cos t|}} \exp\left(-\frac{i}{h \cos t} \left(\frac{y^2 + p^2}{2} \sin t + py\right)\right). \quad (6.67)$$

Это равенство определяет гладкую функцию $\tilde{G}(p, y, t)$ при $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. При этом, так как при $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ имеет место равенство $1 - \text{sign} \cos t = 2$, то, вычисляя обратное преобразование Фурье от \tilde{G} , получим

$$G(x, y, t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{-\frac{i\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi h |\sin t|}} \exp\left(\frac{i}{h \sin t} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \cos t - xy\right)\right). \quad (6.68)$$

Формула (6.68) определяет функцию Грина при $t \in (\pi, 2\pi)$ и отличается от формулы (6.62) на множитель $e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Таким образом, повторно применяя описанный выше метод, мы получаем возможность доопределить функцию Грина на всю вещественную прямую. При этом при каждом переходе через фокальную точку функция Грина будет домножаться на некоторый множитель, и ее общий вид

$$G(x, y, t) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{-\frac{i\pi}{2}} \sigma(t)}{\sqrt{2\pi h |\sin t|}} \exp\left(\frac{i}{h \sin t} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \cos t - xy\right)\right),$$

причем $\sigma(t) = 0$ при $t \in (0, \pi)$ и $\sigma(t) = 1$ при $t \in (\pi, 2\pi)$. Функция $\sigma(t)$ называется *индексом Маслова*.

4.6.6 Регуляризация функции Грина.

Вернемся к рассмотрению точного решения задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\cos t + b \sin t}} \times \exp\left(\frac{i}{h} \frac{2x(k - by) + (b(x^2 + y^2) - 2ky) \cos t - (x^2 + k^2) \sin t}{2(\cos t + b \sin t)}\right), \quad (6.69)$$

соответствующего квадратичной начальной фазе $S_0(x) = k(x - y) + \frac{b}{2}(x - y)^2$ и постоянной амплитуде $\phi_0 = 1$. Можно считать, что b – комплексный параметр. Если $\text{Im}(b) > 0$, то полагая $b = b_1 + ib_2$, получим, что функция $\psi(t, x)$ – равномерно ограниченная при $b_2 > 0$. Положим $J = \cos t + b \sin t$. Заметим, что комплексная функция $\sqrt{J} = \sqrt{|J|} \exp(\frac{i}{2} \arg(J))$ – многозначная. Выделим ее непрерывную ветвь равенством $\arg(J)|_{t=0} = 0$. Тогда равенство (6.69) определяет точное решение для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором, определенное при всех $t \geq 0$. Пусть

теперь $k = 0$, $b = i\beta$, $\beta > 0$. Отнормируем функцию $\psi(t, x)$: положим

$$\psi(t, x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2Jh\pi}} \exp\left(\frac{i}{h} \frac{-2i\beta xy + i\beta(x^2 + y^2) \cos t - x^2 \sin t}{2(\cos t + i\beta \sin t)}\right). \quad (6.70)$$

Заметим, что при такой нормировке $\psi|_{t=0} = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi h}} \exp(-\frac{(x-y)^2}{2h}\beta)$ – гауссовские распределения, и при $\beta \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$\psi|_{t=0} \xrightarrow{D} \delta(x - y), \quad \beta \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, $\psi(t, x) \xrightarrow{D} G(t, x, y)$ при $\beta \rightarrow +\infty$. Сделаем замену $\varepsilon = \frac{1}{\beta}$ и положим

$$G_\varepsilon(t, x, y) = \frac{\exp(-\frac{i\pi}{4})}{\sqrt{2\pi h} \sqrt{\sin t - i\varepsilon \cos t}} \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{h} \frac{(x^2 + y^2) \cos t - 2xy + i\varepsilon x^2 \sin t}{2(\sin t - i\varepsilon \cos t)}\right),$$

где ветвь многозначной функции $\sqrt{\sin t - \varepsilon \cos t}$ выбрана условием $\arg \sqrt{J}|_{t=0} = -\frac{\pi}{4}$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\arg \sqrt{J} = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{tg} t\right) + \pi \left[\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\right],$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа. При $t \neq \pi k$, $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ построенные функции G_ε сходятся к полученной нами ранее функции Грина $G(x, y, t)$ задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором. Если же $t = \pi k$, то

$$G_\varepsilon(\pi k, x, y) = \frac{\exp(-\frac{i\pi}{2}k)}{\sqrt{2\pi h\varepsilon}} \exp\left(-\frac{(x - (-1)^k y)^2}{2h\varepsilon}\right) \xrightarrow{D} \\ \exp(-\frac{i\pi}{2}k) \delta(x - (-1)^k y).$$

Таким образом, нам удалось построить **регуляризации** $G_\varepsilon(t, x, y)$ для функции Грина, которые позволяют найти нужный индекс в тех точках, где $G(x, y, t)$ регулярная, и позволяют также доопределить $G(t, x, y)$ как обобщенную функцию в фокальных точках $t = \pi k$.

4.6.7 Поведение лагранжева многообразия Λ_t и его связь с индексом.

Для лагранжева многообразия, связанного с уравнением Шредингера с гармоническим осциллятором, имеем

$$\Lambda_t = \{P = \xi \cos t - y \sin t, X = \xi \sin t + y \cos t\},$$

т.е. Λ_t – семейство прямых, которые поворачиваются по часовой стрелке с единичной скоростью и становятся вертикальными при $t = \pi k$. Таким образом, индекс $\sigma(t)$, введенный нами ранее, показывает, сколько раз прямая Λ_t стала вертикальной с момента времени $t = 0$. Дадим другое определение индекса. Для этого свяжем с Λ_t целочисленную функцию $\sigma(t)$, которую определим ниже и убедимся, что в случае задачи Коши (6.52) она совпадает с введенным нами ранее индексом Маслова. Положим

$$C(t, \xi) = \frac{\partial X}{\partial \xi}, \quad B(t, \xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

Для гармонического осциллятора $C = \sin t$, $B = \cos t$. Введем регуляризацию для якобиана согласно предыдущему пункту: положим

$$J_\varepsilon = C - i\varepsilon B.$$

Тогда $J_\varepsilon \neq 0$ при $\varepsilon > 0$. Поэтому определена непрерывная функция $\arg(J_\varepsilon)$, и для вычисления $\sigma(t)$ положим

$$\sigma(\xi, t) = \sigma(\xi_0, t_0) + \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \arg(J_\varepsilon)|_{\xi_0, t_0}^{\xi, t}.$$

Заметим, что

$$\arg(J_\varepsilon)|_{\xi_0, t_0}^{\xi, t} = \operatorname{Im}(\operatorname{Ln} J_\varepsilon)|_{\xi_0, t_0}^{\xi, t} = \int_{t_0}^t \operatorname{Im} \frac{dJ_\varepsilon}{J_\varepsilon},$$

откуда окончательно получаем

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) + \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{t_0}^t \operatorname{Im} \frac{dJ_\varepsilon}{J_\varepsilon}. \quad (6.71)$$

В случае гармонического осциллятора формула (6.71) дает

$$\sigma(t) = 0 + \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_0^t \frac{\varepsilon dt}{\sin^2 t + \varepsilon^2 \cos^2 t},$$

и явное исследование правой части показывает, что определенная формулой (6.71) функция $\sigma(t)$ действительно является индексом Маслова задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором. В связи с этим, в общем случае будем рассматривать формулу (6.71) как **определение** индекса Маслова.

4.6.8 Канонический оператор Маслова в одномерном случае.

Рассмотрим теперь случай „почти“ произвольного уравнения Шредингера (6.44). На потенциал $U(x)$ в этом уравнении мы далее наложим некоторые ограничения. Начнем с того, что сопоставим уравнению Гамильтона-Якоби для фазы (6.45) лагранжево многообразие Λ_t и определим на этом многообразии функции

$$z(t, \xi) = S_0(\xi) + \int_0^t \mathcal{H}(\xi, \tau) d\tau, \quad \phi(\xi) = \phi_0(\xi), \quad C = \frac{\partial X}{\partial \xi}, \quad B = \frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

Заметим, что C – якобиан, и в тех точках, где он не равен нулю, лагранжево многообразие допускает проектирование на ось x , т.е. при $C \neq 0$ существует гладкая функция $K(t, x)$ такая, что $\xi = K(t, x)$ является решением алгебраического уравнения $X(t, \xi) = x$. Подставляя эту функцию вместо ξ в равенство

$$\psi(t, \xi) = \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{C(t, \xi)}} \exp\left(\frac{i}{h} z(t, \xi)\right)$$

получаем коротковолновую асимптотику $\psi(t, x)$. Заметим, что B и C не обращаются в ноль одновременно. Далее, из метода стационарной фазы получаем

$$(\mathcal{F}_{x \rightarrow p}^h \psi)(t, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ipy}{h}} \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{C(t, \xi)}} \exp\left(\frac{i}{h} z(t, \xi)\right) \Big|_{\xi=K(t, y)} dy =$$

$$= \frac{e^{iq\frac{\pi}{4}}\phi(\xi)}{\sqrt{B}} \exp\left(\frac{i(z(t, \xi) - pX(t, \xi))}{h} + O(h)\right) \Big|_{\xi=\xi(t,p)},$$

где $q = \text{sign} \frac{B}{C}$, и после перехода через фокальную точку с помощью преобразования Фурье окончательно получаем

$$\psi(t, x) = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma(t)} \frac{\phi(\xi)}{\sqrt{C}} \exp\left(\frac{i}{h}z(t, \xi)\right) \Big|_{\xi=K(t,x)} + O(h),$$

где $\sigma(t)$ – индекс Маслова, определенный формулой (6.71). Заметим, что сделав h -преобразование Фурье с уравнением Шредингера с гармоническим осциллятором, мы вновь получим это же уравнение. Этот замечательный факт и является причиной того, что для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором функцию Грина можно построить точно. В случае же, когда преобразование Фурье от потенциала $U(x)$ будет дифференциальным оператором с главной частью второго порядка, метод канонического оператора, описанный в этом пункте, также применим, но позволяет построить только асимптотику для функции Грина с точностью до $O(h)$.

Упражнения.

1. Дать определение h -преобразования Фурье быстро убывающих функций. Проверить равенства (6.56), (6.57).
2. Проверить, что коротковолновая асимптотика для задачи (6.65) дает (6.63), (6.64).
3. Убедиться в том, что явное вычисление интеграла с квадратичной фазой в правой части (6.66) дает в результате формулу (6.67).
4. Показать, что функция $\psi(t, x)$, определенная равенством (6.69) равномерно ограничена по t, x при $b \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(b) > 0$.

Литература:

Конспекты лекций по математическим методам физики, под редакцией В. В. Белова и С. Ю. Доброхотова, Институт им. Курчатова(2007)

Авторы благодарны С. Ю. Доброхотову за предоставленную рукопись.

Глава 5

Курсовые работы первого семестра (список задач по построению коротковолновых асимптотик).

Уравнение Шредингера. Построить коротковолновую асимптотику и указать интервал времени, на котором она определена, для следующей задачи:

$$1. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + 2x^2 \psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{1-x^4} e^{\frac{2i}{h}x}.$$

$$2. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + x^2 \psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{4-x^2} e^{\frac{-i}{h}x}.$$

$$3. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + 3x^2 \psi, \quad \psi|_{t=0} = \sin(x) e^{\frac{i}{2h}x}.$$

$$4. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + \frac{1}{2}x^2 \psi, \quad \psi|_{t=0} = \sin(4-x) e^{\frac{3i}{h}x}.$$

$$5. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi - x^2 \psi, \quad \psi|_{t=0} = (x-2) e^{\frac{i}{h}x}.$$

$$6. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + (x-4)\psi, \quad \psi|_{t=0} = (2x-8)^2 e^{\frac{i}{h}x^2}.$$

$$7. \quad ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + (2x-1)\psi, \quad \psi|_{t=0} = e^{-x^2} e^{\frac{i}{2h}x^2}.$$

8. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (3-x)\psi, \quad \psi|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\frac{2i}{h}x^2}.$
9. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (5+2x)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{3+x^2}e^{\frac{-i}{h}x^2}.$
10. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (1+x)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \operatorname{tg}(x)e^{\frac{i}{h}(x-1)^2}.$
11. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + 3x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{1-4x^2}e^{\frac{i}{3h}x}.$
12. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + \frac{1}{2}x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{1-x^2}e^{\frac{-2i}{h}x}.$
13. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (x+1)^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \cos(x)e^{\frac{i}{h}x}.$
14. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + \frac{2}{3}x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \cos(2x)e^{\frac{i}{h}x}.$
15. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + 4x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = (x-2)^2e^{\frac{2i}{h}x}.$
16. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (x^2+2x+1)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{9-4x^2}e^{\frac{i}{h}x}.$
17. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (4x^2-4x+1)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{4-x^4}e^{\frac{-2i}{h}x}.$
18. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (2x^2+8x+8)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{1+x^2}e^{\frac{i}{h}x}.$
19. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (x^2-6x+9)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \operatorname{tg}(1-x)e^{\frac{i}{2h}x}.$
20. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi - (x^2+8x+16)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sin(2x)e^{\frac{-i}{3h}x}.$
21. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (3x-7)\psi, \quad \psi|_{t=0} = \cos(x)e^{\frac{i}{h}x^2}.$
22. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (2x+9)\psi, \quad \psi|_{t=0} = e^{-2x^2}e^{\frac{3i}{h}x^2}.$
23. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (1-4x)\psi, \quad \psi|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\frac{-i}{h}x^2}.$
24. $ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + (5+x)\psi, \quad \psi|_{t=0} = (x-2)^3e^{\frac{i}{h}x}.$

$$25. ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + (x^2 + 1)\psi, \quad \psi|_{t=0} = (2 - x^3)e^{\frac{-i}{h}(x-1)^2}.$$

$$26. ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + 4x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = (1 - x^2)e^{\frac{2i}{h}x}.$$

$$27. ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + 9x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \sqrt{1 - 9x^2}e^{\frac{-i}{h}x}.$$

$$28. ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + 2x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \cos(2x)e^{\frac{2i}{h}x}.$$

$$29. ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + \frac{1}{4}x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = (4 - x)^2e^{\frac{-i}{h}x}.$$

$$30. ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + x^2\psi, \quad \psi|_{t=0} = \cos(x - 2)e^{\frac{2i}{h}x}.$$

Волновое уравнение. Построить коротковолновую асимптотику для следующей задачи:

$$1. u_{tt} - (x - 3)^4 u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = 2, \quad S_0(x) = \frac{1}{3 - x}.$$

$$2. u_{tt} - \frac{4}{(x + 1)^2} u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = 3\sqrt{x + 1}, \quad S_0(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2.$$

$$3. u_{tt} - \frac{1}{(2x - 1)^2} u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = -\sqrt{x - \frac{1}{2}}, \quad S_0(x) = (x - \frac{1}{2})^2.$$

$$4. u_{tt} - \frac{4}{x^4} u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = x, \quad S_0(x) = \frac{1}{6}x^3,$$

$$5. u_{tt} - 9x^6 u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = \frac{4}{\sqrt{x^3}}, \quad S_0(x) = -\frac{1}{6x^2}.$$

$$6. u_{tt} - (t + 3)^4 u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = 1, \quad S_0(x) = 9 - x,$$

$$7. u_{tt} - 4(t + 1)^2 u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = -1, \quad S_0(x) = 1 + x.$$

$$8. u_{tt} - \frac{1}{4}(t + 2)^2 u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = \frac{1}{2}, \quad S_0(x) = 1 - x,$$

$$9. u_{tt} - \frac{4}{(t + 1)^4} u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = -\frac{1}{3}, \quad S_0(x) = 2 + x.$$

$$10. u_{tt} - \frac{9}{(t + 2)^6} u_{xx} = 0, \quad \phi_0(x) = 3, \quad S_0(x) = \frac{3}{8} + x,$$

11. $u_{tt} - (x + 5)^4 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 1, S_0(x) = -\frac{1}{x + 5}.$
12. $u_{tt} - \frac{4}{(x + 1)^2} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = -2\sqrt{x + 1}, S_0(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2.$
13. $u_{tt} - \frac{1}{(1 + x^2)^2} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = -1, S_0(x) = \sqrt{1 + x^2}.$
14. $u_{tt} - \frac{4}{1 + x^4} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 1, S_0(x) = \frac{1}{6}x,$
15. $u_{tt} - 9x^4 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2}}, S_0(x) = -\frac{1}{4x}.$
16. $u_{tt} - (x + 5)^6 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{(x + 5)^3}}, S_0(x) = -\frac{1}{2x^2 + 20x + 50}.$
17. $u_{tt} - \frac{1}{(x - 1)^4} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 2x - 2, S_0(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^3.$
18. $u_{tt} - \frac{4}{(2x + 3)^2} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 2\sqrt{x + \frac{3}{2}}, S_0(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{2})^2.$
19. $u_{tt} - \frac{9}{x^6} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 3\sqrt{x^3}, S_0(x) = \frac{1}{12}x^4,$
20. $u_{tt} - 4x^4 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = \frac{4}{x}, S_0(x) = -\frac{1}{2x}.$
21. $u_{tt} - (t + 1)^6 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 1, S_0(x) = -\frac{1}{4} + x,$
22. $u_{tt} - 4(t + 2)^4 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = -1, S_0(x) = \frac{16}{3} - x.$
23. $u_{tt} - \frac{1}{4}(t + 3)^6 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = \frac{1}{2}, S_0(x) = \frac{81}{8} - x,$
24. $u_{tt} - \frac{4}{(t + 2)^4} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = -\frac{1}{3}, S_0(x) = -1 + x.$
25. $u_{tt} - \frac{9}{(t + 1)^4} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 3, S_0(x) = 3 + x,$
26. $u_{tt} - (x + 1)^6 u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 1, S_0(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}.$

$$27. u_{tt} - \frac{4}{(x^2 + 1)^2} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = 3, S_0(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1).$$

$$28. u_{tt} - \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = -x, S_0(x) = \sqrt{(x - 1)^2 + 1}.$$

$$29. u_{tt} - \frac{9}{x^6} u_{xx} = 0, \phi_0(x) = x^2, S_0(x) = \frac{1}{6}x^4,$$

$$30. u_{tt} - (9x^2 + 1)u_{xx} = 0, \phi_0(x) = \frac{4}{x^2 + 1}, S_0(x) = -\frac{1}{2}.$$

Глава 6

Качественные свойства решений уравнений математической физики.

6.1 Волновое уравнение.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $t > 0$, $a > 0$. Цель этого раздела – изучить свойства волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \quad (1.1)$$

и неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t, x) \quad (1.2)$$

с начальными и граничными условиями. Иногда оператор Даламбера $\partial_t^2 - a^2 \Delta$ обозначают \square_a . Начнем с того, что сделаем в (1.2) замену независимой переменной t : положим $\tau = at$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \end{aligned}$$

и, полагая $v(\tau, x) = u(t, x)$, $g(\tau, x) = \frac{1}{a^2} f(t, x)$ получаем, что (1.2) эквивалентно уравнению $\square_1 v = g(\tau, x)$. Таким образом, начиная с пункта 2 и далее мы без ограничения общности будем считать, что $a = 1$.

6.1.1 Модельная задача, приводящая к волновому уравнению ($n = 1$).

В качестве модельной задачи, приводящей к волновому уравнению, рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны. Пусть струна длиной l натянута с силой T . Направим ось Ox вдоль струны, находящейся в положении равновесия, так, чтобы левый конец струны совпал с точкой $x = 0$. Будем рассматривать только поперечные колебания струны, когда каждая точка x смещается вдоль перпендикулярной к Ox оси Ou . Обозначим $u(x, t)$ смещение точки струны с координатой x в момент времени t . Пусть также μ – линейная плотность струны, $\alpha(x, t)$ – угол между касательной к струне в точке x и положительным направлением оси Ox в момент времени t . Рассмотрим малый участок струны длины Δx и запишем для этого участка второй закон Ньютона в проекции на ось Ou . Будем предполагать, что $|\alpha(y, t)| \ll 1$ для всех $y \in [x, x + \Delta x]$. Тогда сила, действующая на рассматриваемый участок струны, с одной стороны, равна

$$m \cdot a_u = \mu \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dy.$$

С другой стороны та же сила вычисляется как

$$F_\Sigma = F_L + F_R + \int_x^{x+\Delta x} f(y, t) dy,$$

где $F_L = -T \sin(\alpha(x, t))$ – проекция силы натяжения, действующей на левый конец струны; $F_R = T \sin(\alpha(x + \Delta x, t))$ – проекция силы, действующей на правый конец струны, $f(y, t)$ – плотность поперечных внешних сил, действующих на точку y в момент времени t . Далее, приравнявая $F_\Sigma = m \cdot a_u$, получаем

$$\begin{aligned} \mu \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dy &= \\ &= T(\sin(\alpha(x + \Delta x, t)) - \sin(\alpha(x, t))) + \int_x^{x+\Delta x} f(y, t) dy. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее, так как $|\alpha(y, t)| \ll 1$ для всех $y \in [x, x + \Delta x]$, то $\sin(\alpha(y, t)) \approx \text{tg}(\alpha(y, t)) = \frac{\partial u}{\partial x}(y, t)$. Переходя с помощью этого в (1.3) к приближенному

равенству с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, после деления обеих частей на Δx имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(y, t) dy &\approx . \\ &\approx T \frac{\partial_x u(x + \Delta x, t) - \partial_x u(x, t)}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(y, t) dy \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отсюда, устремляя $\Delta x \rightarrow 0$, получаем следующее уравнение:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (1.5)$$

Заметим, что уравнение (1.5) приводится к виду (1.2) делением на μ . Таким образом, малые поперечные колебания струны приближенно описываются волновым уравнением.

Обсудим вопрос о том, какие граничные условия (т.е. условия на концах струны) будут физически корректными. Нетрудно видеть, что достаточно ответить на этот вопрос только для левого конца струны.

Если левый конец струны закреплен, то его смещение равно нулю, а значит, соответствующее граничное условие имеет вид

$$u(0, t) = 0. \quad (1.6)$$

Пусть левый конец струны прикреплен к кольцу пренебрежимо малой массы, которое может свободно, без трения, двигаться по вертикальному стержню (такой конец называют свободным). Тогда вертикальная составляющая силы действия стержня на левый конец струны равна нулю. Следовательно, по третьему закону Ньютона равна нулю и вертикальная составляющая силы натяжения струны при $x = 0$. Таким образом, в этом случае соответствующее граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0. \quad (1.7)$$

Если же массой кольца пренебречь нельзя, и она равна m , то по второму закону Ньютона для левого конца струны имеет место граничное условие $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$.

Если же на кольцо действует еще и сила трения, пропорциональная скорости, то граничное условие принимает вид $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \eta \frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$.

Если, помимо всего предыдущего, предположить, что кольцо закреплено на пружине жесткости k , и на него действует внешняя сила $g(t)$, то мы получаем граничное условие для левого конца струны в следующем виде:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \eta \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - ku(0, t) + g(t). \quad (1.8)$$

Упражнения к пункту 1.

1. Проверить, что уравнение (1.5) получается из (1.4) предельным переходом при $\Delta x \rightarrow 0$.

2. Какие начальные условия (т.е. условия в момент времени $t = 0$) нужно задать, исходя из физических соображений, для того, чтобы можно было однозначно определить положение точек струны в ближайшем будущем? Как согласовать эти условия с граничными?

6.1.2 Представление решения в виде суммы двух волн ($n = 1$).

Пусть $n = 1$. Сделаем замену независимых переменных: $\xi = x + t$, $\eta = x - t$. Тогда:

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi - u_\eta,$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{tt} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Таким образом, при $a = 1$ и $n = 1$ уравнение (1.1) принимает вид $u_{\xi\eta} = 0$. Таким образом, если $u(t, x) \in C^2$ – решение (1.1), $v(\xi, \eta) = u(t, x) = u(\frac{1}{2}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta))$, то $v_{\xi\eta} = 0$. Интегрируя это уравнение сначала по переменной η , а затем по переменной ξ , получаем $v_\xi = F(\xi)$, и далее $v(\xi, \eta) = F_1(\xi) + G(\eta)$, т.е.

$$u(t, x) = F_1(x + t) + G(x - t) \quad (1.9)$$

Заметим, что если функции $F_1(\cdot)$ и $G(\cdot)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми, то функция $u(t, x)$, заданная формулой (1.9) – классическое решение уравнения (1.1) при $a = 1$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 47 (Решение как сумма двух волн.) Функция $u(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ – классическое решение уравнения (1.1) при $a = 1$ тогда и только тогда, когда найдутся функции $F_1(\cdot), G(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ такие, что $u(t, x)$ представляется в виде (1.9). При этом слагаемое $F_1(x + t)$ называется волной, бегущей влево, а слагаемое $G(x - t)$ – волной, бегущей вправо.

Следствие 6 (Формула Даламбера.) Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases} \quad (1.10)$$

где $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда функция $u(t, x)$, задаваемая формулой Даламбера

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\phi(x + t) + \phi(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds \quad (1.11)$$

является классическим решением задачи (1.10).

Доказательство. В силу теоремы 47 классическое решение задачи (1.10) имеет вид (1.9), если оно существует. Подставляя представление (1.9) в начальные условия, получаем

$$F_1(x) + G(x) = \phi(x),$$

$$F_1'(x) - G'(x) = \psi(x).$$

Отсюда $F(x) - G(x) = \int_0^x \psi(s) ds + 2C$, и далее

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \psi(s) ds + C, \quad (1.12)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \psi(s) ds - C. \quad (1.13)$$

Так как $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, то функции $F_1(x)$ и $G(x)$, определенные формулами (1.12) и (1.13) соответственно, являются дважды непрерывно дифференцируемыми. Следовательно, согласно теореме 47

задача Коши (1.10) имеет классическое решение, которое может быть записано в виде (1.9). Далее, подставляя выражения (1.12), (1.13) в (1.9), получаем формулу Даламбера (1.11). Следствие доказано.

Упражнения к пункту 2.

1. Получить формулу Даламбера в случае, когда $a \neq 1$.
2. С какой скоростью бежит влево волна $F_1(x + t)$?

6.1.3 Смешанная задача для $n = 1$. Методы четного и нечетного продолжения.

Рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Пусть $\phi(x) \in C^2([0, +\infty))$, $\psi(x) \in C^2([0, +\infty))$. Если $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ – решение задачи (1.14), то из непрерывности в точке $(0, 0)$ для функции $u(t, x)$ и ее производных по t вплоть до второго порядка получаем условие разрешимости

$$\phi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \phi''(0) = 0. \quad (1.15)$$

Заметим, что если условие разрешимости выполнено, то функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ можно продолжить на \mathbb{R} нечетным образом с сохранением гладкости: положим

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ -\phi(-x), & x < 0; \end{cases} \\ \psi_1(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Сопоставим смешанной задаче (1.14) задачу Коши:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ v|_{t=0} = \phi_1(x), \\ v_t|_{t=0} = \psi_1(x). \end{cases} \quad (1.16)$$

Оказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 48 (Метод нечетного продолжения.) Пусть $\phi(x) \in C^2([0, +\infty))$, $\psi(x) \in C^2([0, +\infty))$, и выполнены условия разрешимости (1.15). Пусть также функция $v(t, x)$ – решение задачи Коши (1.16), определенное по формуле Даламбера. Тогда функция $u(t, x) = v(t, x)|_{x \geq 0}$ – решение смешанной задачи (1.14).

Доказательство. 1) Так как $v(t, x)$ – решение (1.16), функция $u(t, x)$ является ограничением $v(t, x)$ на полуось $x \geq 0$, то $u_{tt} - u_{xx} = 0$ при $t > 0$, $x > 0$.

2) Так как при $x \geq 0$ функции $\phi(x)$ и $\phi_1(x)$ совпадают, то $u|_{t=0} = \phi(x)$. Аналогично $u_t|_{t=0} = \psi(x)$.

3) Пусть $t > 0$, $x = 0$. В силу формулы Даламбера (1.11) имеем

$$v(t, 0) = \frac{1}{2}(\phi_1(t) + \phi_1(-t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t \psi_1(s) ds.$$

Первое слагаемое обращается в ноль в силу нечетности функции $\phi_1(x)$. Второе слагаемое равно нулю, так как является интегралом от нечетной функции $\psi_1(x)$ по симметричному относительно нуля промежутку $[-t, t]$. Таким образом, $u|_{x=0} = v|_{x=0} = 0$. Теорема доказана.

Следствие 7 Пусть $\phi(x) \in C^2([0, +\infty))$, $\psi(x) \in C^2([0, +\infty))$, и выполнены условия разрешимости (1.15). Тогда классическим решением смешанной задачи (1.14) является функция $u(t, x)$, определенная формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi(x+t) + \phi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds, & x \geq t \\ \frac{1}{2}(\phi(x+t) - \phi(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} \psi(s) ds, & 0 \leq x < t. \end{cases} \quad (1.17)$$

Рассмотрим теперь смешанную задачу для полуограниченной струны с граничным условием вида (1.7):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0, x > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u_x|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Пусть, как и в предыдущем случае, начальные условия $\phi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат классу функций $C^2([0, +\infty))$. Попробуем получить аналог формулы (1.17) для классического решения смешанной задачи (1.18). Пусть сначала $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ – классическое решение задачи (1.18). Тогда из непрерывности функций $u_x(t, x)$ и $u_{xt}(t, x)$ при $t = x = 0$ получаем условие разрешимости

$$\phi'(0) = 0, \psi'(0) = 0. \quad (1.19)$$

Заметим, что если это условие выполнено, то функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ могут быть продолжены на \mathbb{R} четным образом с сохранением класса гладкости. Положим

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ \phi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Сопоставим смешанной задаче (1.18) задачу Коши:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ v|_{t=0} = \phi_2(x), \\ v_t|_{t=0} = \psi_2(x). \end{cases} \quad (1.20)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 49 (Метод четного продолжения.) Пусть $\phi(x) \in C^2([0, +\infty))$, $\psi(x) \in C^2([0, +\infty))$, и выполнены условия разрешимости (1.19). Пусть также функция $v(t, x)$ – решение задачи Коши (1.20), определенное по формуле Даламбера. Тогда функция $u(t, x) = v(t, x)|_{x \geq 0}$ – решение смешанной задачи (1.18).

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 48.

Следствие 8 Пусть $\phi(x) \in C^2([0, +\infty))$, $\psi(x) \in C^2([0, +\infty))$, и выполнены условия разрешимости (1.19). Тогда классическим решением сме-

шанной задачи (1.18) является функция $u(t, x)$, задаваемая формулой

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi(x+t) + \phi(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds, & x \geq t \\ \frac{1}{2}(\phi(x+t) + \phi(t-x)) + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \psi(s) ds + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \psi(s) ds, & 0 \leq x < t. \end{cases} \quad (1.21)$$

Упражнения к пункту 3.

1. Провести подробное доказательство теоремы 49.
2. Доказать следствие 7 (прямой подстановкой выражений для функций $\phi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ в формулу Даламбера).

6.1.4 Сферические средние. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Пусть $n \geq 2$, $m \geq 2$, функция $u(t, x) \in C^m([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \quad (1.22)$$

Наша цель в этом и следующих двух пунктах – выразить явно функцию $u(t, x)$ через функции $\phi(x)$, $\psi(x)$. Для этого перейдем к сферическим средним от функции $u(t, x)$, и сопоставим задаче (1.22) одномерную по пространству задачу. Пусть $\alpha(n)$ – объем единичного шара в \mathbb{R}^n . Заметим, что тогда $n\alpha(n)$ – площадь поверхности того же шара. Положим

$$U(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(t, y) dS_y,$$

где $B(x, r)$ – шар с центром в x радиуса r . Определим также сферические средние от начальных данных:

$$G(x; r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} \phi(y) dS_y,$$

$$H(x; r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \psi(y) dS_y.$$

Заметим, что при $r \rightarrow 0 + 0$, если функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывные, имеет место сходимость $U(x; r, t) \rightarrow u(t, x)$, $G(x; r) \rightarrow \phi(x)$, $H(x; r) \rightarrow \psi(x)$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$ и найдем уравнение, которому удовлетворяет функция $U(x; r, t)$.

Теорема 50 (Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.) Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ – фиксированная точка, функция $u(t, x) \in C^m([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ – решение задачи Коши (1.22). Тогда функция $U(x; r, t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу:

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0, & t > 0, \quad r > 0, \\ U|_{t=0} = G(r), \\ U_t|_{t=0} = H(r). \end{cases} \quad (1.23)$$

Доказательство. Перейдем в формуле для сферического среднего к интегрированию по единичной сфере с центром в нуле:

$$U(x; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(t, x + rz) dS_z.$$

В силу того, что функция $u(t, x)$ является m раз непрерывно дифференцируемой, из приведенного выше равенства для $U(x; r, z)$ следует, что функция $U(x; , r, z)$ является 2 раза непрерывно дифференцируемой по r и дважды непрерывно дифференцируемой по t . Далее,

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(t, x + rz), z \rangle dS_z = \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla u(t, y), \frac{y-x}{r} \rangle dS_y = \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u(t, y)}{\partial \nu} dS_y = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(t, y) dy. \end{aligned}$$

Далее, так как $u_{tt} - \Delta u = 0$, то

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt}(t, y) dy.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (r^{n-1}U_r)_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t, y) dS_y = \\ &= r^{n-1} \cdot \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(t, y) dy = r^{n-1}U_{tt}. \end{aligned}$$

Таким образом, $(r^{n-1}U_r)_r = r^{n-1}U_{tt}$, откуда следует (1.23).

6.1.5 Случай $n = 3$. Формула Кирхгофа. Волновые фронты.

Пусть теперь $n = 3$, функция $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$ – решение задачи Коши (1.22). Положим $\tilde{U} = rU$, $\tilde{G} = rG$, $\tilde{H} = rH$. Тогда

$$\tilde{U}_{rr} = rU_{rr} + 2U_r,$$

и уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (1.23) примет вид:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0, & t > 0, r > 0, \\ \tilde{U}|_{t=0} = \tilde{G}(r), \\ \tilde{U}_t|_{t=0} = \tilde{H}(r), \\ \tilde{U}|_{r=0} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция \tilde{U} – решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, и соответствующая задача имеет вид (1.14). Кроме того, функции \tilde{G} и \tilde{H} удовлетворяют условиям разрешимости (1.15). Значит, согласно следствию 7, функция $\tilde{U}(t, r)$ задается формулой (1.17). Так как $u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0+0} U(x; r, t)$, то отсюда

$$u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2}(\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(s) ds \right) =$$

$$= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t).$$

Подставляя явные выражения для \tilde{G} и \tilde{H} , получаем

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \phi(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \psi(y) dS_y. \quad (1.24)$$

Формула (1.24) носит название формулы Кирхгофа для решения задачи Коши (1.22).

Замечание 14 *Заметим, что формула Кирхгофа содержит производные от функции $\phi(x)$. Этот факт дает основания считать, что требование $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ является недостаточным для того, чтобы функция $u(t, x)$, определенная формулой Кирхгофа (1.24), была дважды непрерывно дифференцируемой: сингулярности функции $\phi(x)$ могут сфокусироваться при $t > 0$ и функция $u(t, x)$ будет, вообще говоря, обладать меньшей гладкостью. Для того же, чтобы гарантировать $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R}^3)$, приходится требовать большей гладкости от начальных данных: $\phi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$.*

Пусть теперь $\text{supp } \phi(x) \subseteq M$ и $\text{supp } \psi(x) \subseteq M$, $M \subset \mathbb{R}^3$ – компактное множество. Можно интерпретировать решение $u(t, x)$ задачи Коши (1.22) как возмущение в момент времени t , соответствующее начальным возмущениям $\phi(x)$ и $\psi(x)$. Из формулы Кирхгофа следует, что при финитных начальных возмущениях решение $u(t, x)$ будет финитно по x при фиксированном t , т.е. возмущение распространяется с конечной скоростью. Введем понятия переднего и заднего фронта волны.

Определение 2 *Зафиксируем $x^0 \in \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что в момент времени t_0 через точку x^0 проходит передний фронт волны, если*

$$t_0 = \sup\{T \geq 0 \mid u(t, x^0) = 0 \ \forall t \in [0, T]\}.$$

Пусть теперь $t_ > 0$. Совокупность всех точек x_* таких, что через точку x_* передний фронт волны проходит в момент времени t_* будем обозначать $\mathcal{A}\uparrow\mathcal{F}_+(t_*)$ и называть передним фронтом волны в момент времени t_* .*

Аналогично для описания заднего фронта зафиксируем $x^0 \in \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что в момент времени t_0 через точку x^0 проходит задний фронт волны, если

$$t_0 = \inf\{T \geq 0 \mid u(t, x^0) = 0 \forall t \in (T, +\infty)\}.$$

Пусть теперь $t_* > 0$. Совокупность всех точек x_* таких, что через точку x_* задний фронт волны проходит в момент времени t_* будем обозначать $\mathcal{A}\uparrow\mathcal{F}_-(t_*)$ и называть задним фронтом волны в момент времени t_* .

В случае $n = 3$ из формулы Кирхгофа вытекает следующее утверждение.

Утверждение 13 Пусть $n = 3$, начальные данные $\phi(x)$ и $\psi(x)$ задачи Коши (1.22) финитны. Тогда волновые фронты $\mathcal{A}\uparrow\mathcal{F}_+(t)$ и $\mathcal{A}\uparrow\mathcal{F}_-(t)$ распространяются в пространстве со скоростью единица. Более того, для любой фиксированной точки $x^0 \in \mathbb{R}^3$, не принадлежащей $\text{supp } \phi(x) \cup \text{supp } \psi(x)$, найдутся моменты времени $t_1 > 0$ и $t_2 \geq t_1$ такие, что $x^0 \in \mathcal{A}\uparrow\mathcal{F}_+(t_1)$, $x^0 \in \mathcal{A}\uparrow\mathcal{F}_-(t_2)$.

6.1.6 $n = 2$. Метод спуска. Формула Пуассона.

В случае, когда размерность пространства равна двум, прием, который позволил свести уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу в трехмерном случае к смешанной задаче для одномерного волнового уравнения, применить не удастся. Поэтому предлагается использовать т.н. метод спуска, который заключается в том, чтобы рассмотреть соответствующую задачу в пространстве более высокой размерности, а затем избавиться от “лишних” переменных. Пусть $x \in \mathbb{R}^2$. Обозначим

$$\bar{x} = (x, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \bar{x}_* = (x, 0)$$

и определим функции

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = u(t, x), \quad \bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x), \quad \bar{\psi}(\bar{x}) = \psi(x).$$

Сопоставим задаче Коши (1.22) для неизвестной функции $u(t, x)$ в случае $n = 2$ задачу Коши того же вида для неизвестной функции $\bar{u}(t, \bar{x})$ – т.е. задачу в пространстве более высокой размерности. Тогда функция $\bar{u}(t, \bar{x})$, определенная по формуле Кирхгофа, будет решением задачи в

пространстве более высокой размерности. Пусть $B_m(y, R)$ – шар в пространстве \mathbb{R}^m радиуса R с центром в точке $y \in \mathbb{R}^m$. Из формулы Кирхгофа получаем:

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{\phi}(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{\psi}(y) dS_y = \frac{\partial}{\partial t} I_\phi + I_\psi.$$

Далее, преобразуя I_ϕ , получаем:

$$\begin{aligned} I_\phi &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{\phi}(y) dS_y = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_3(\bar{x}, t)} \bar{\phi}(y) dS_y = \\ &= \frac{2}{4\pi t} \int_{B_2(x, t)} \phi(y) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(y)|^2} dy, \end{aligned}$$

где $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - |y - x|^2}$, множитель 2 перед интегралом возникает в силу того, что сфера в \mathbb{R}^3 представлена как объединение двух полусфер, а интегралы по полусферам равны. Вычисляя явно $\nabla \gamma(y)$ и подставляя в выражение для I_ϕ , получаем:

$$\begin{aligned} 1 + |\nabla \gamma(y)|^2 &= \frac{t^2}{t^2 - |y - x|^2}, \\ I_\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_2(x, t)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I_\phi &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{2\pi} \int_{B_2(0, 1)} \frac{\phi(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_2(0, 1)} \frac{\phi(x + tz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz + \\ &+ \frac{t}{2\pi} \int_{B_2(0, 1)} \frac{\langle \nabla \phi, z \rangle}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz = \frac{1}{2\pi t} \int_{B_2(x, t)} \frac{\phi(y) + \langle \nabla \phi(y), y - x \rangle}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу Пуассона для решения задачи Коши (1.22) в случае $n = 2$:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B_2(x, t)} \frac{\phi(y) + \langle \nabla \phi(y), y - x \rangle + t\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy. \quad (1.25)$$

6.1.7 Неоднородная задача. Принцип Дюамеля.

Рассмотрим теперь задачу Коши с нулевыми начальными условиями для неоднородного волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Прием, называемый принципом Дюамеля, позволяет свести решение этой задачи Коши к решению вспомогательной задачи

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & t > s, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=s} = 0, \\ v_t|_{t=s} = f(s, x), \end{cases} \quad (1.27)$$

где $s > 0$ – параметр.

Теорема 51 (Принцип Дюамеля.) Пусть $n \geq 2$, функция $v(t, x, s)$ – классическое решение задачи (1.27), функция $u(t, x)$ задана формулой

$$u(t, x) = \int_0^t v(t, x, s) ds.$$

Тогда $u(t, x)$ – классическое решение задачи (1.26).

Доказательство. Так как функция $v(t, x, s)$ – классическое решение задачи (1.27), то она является дважды непрерывно дифференцируемой. Отсюда функция $u(t, x)$ также дважды непрерывно дифференцируема. Вычисляя явно производные по t от функции $u(t, x)$ получаем:

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= v(t, x, t) + \int_0^t v_t(t, x, s) ds = \int_0^t v_t(t, x, s) ds, \\ u_{tt}(t, x) &= v_t(t, x, t) + \int_0^t v_{tt}(t, x, s) ds = \\ &= f(t, x) + \int_0^t \Delta v(t, x, s) ds = f(t, x) + \Delta u(t, x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u(t, x)$ удовлетворяет неоднородному волновому уравнению. Нетрудно видеть, что $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$. Теорема доказана.

6.1.8 Конус зависимости. Единственность.

Пусть $u(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ – решение волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$. Рассмотрим конус

$$K(t_0, x^0) = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x^0| \leq t_0 - t\}.$$

Конус $K(t_0, x^0)$ называется конусом зависимости от начальных данных. Оказывается, что значение функции $u(t, x)$ внутри конуса $K(t_0, x^0)$ зависит только от значений начальных данных на основании этого конуса – в шаре $B(x^0, t_0)$. Обоснование этого факта дает следующая теорема.

Теорема 52 Если $u(0, x) = 0$ и $u_t(0, x) = 0$ при всех $x \in B(x^0, t_0)$, то $u(t, x) = 0$ при всех $(t, x) \in K(t_0, x^0)$.

Доказательство. Положим

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(x^0, t_0-t)} (u_t^2(t, x) + |\nabla u(t, x)|^2) dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(x^0, t_0-t)} (u_t u_{tt} + \langle \nabla u, \nabla u_t \rangle) dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\partial B(x^0, t_0-t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS_x = \int_{B(x^0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \\ &+ \int_{\partial B(x^0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS_x - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x^0, t_0-t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS_x = \\ &= \int_{\partial B(x^0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} (u_t^2 + |\nabla u|^2) \right) dS_x. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| = | \langle \nabla u, \nu \rangle | \leq |\nabla u|,$$

так как $|\nu| = 1$, и далее

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |\nabla u| \cdot |u_t| \leq \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + |u_t|^2).$$

Следовательно, $\dot{e}(t) \leq 0$ при $0 < t < t_0$, и, так как $e(0) = 0$, $e(t) \geq 0$, то $e(t) = 0$ для всех $t \in [0, t_0)$. Отсюда следует, что $u_t = 0$ и $\nabla u = 0$ в $K(x^0, t_0)$, а значит, $u(t, x) = 0$ внутри $K(x^0, t_0)$. Теорема доказана.

Следствие 9 (Единственность.) *Задача Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (1.28)$$

имеет не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u(t, x)$ и $v(t, x)$ – два классических решения задачи (1.28). Положим $w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$. Зафиксируем произвольные $t_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что функция $w(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 52 в конусе $K(x^0, 2t_0)$. Следовательно, $w(t_0, x^0) = 0$. В силу произвольности выбора точки (t_0, x^0) получаем, что функции $u(t, x)$ и $v(t, x)$ обязаны совпадать. Следствие доказано.

6.2 Уравнение Лапласа.

6.2.1 Основные определения. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – область.

Определение 3 *Уравнение*

$$\Delta u(x) = 0 \quad (2.29)$$

называется уравнением Лапласа. Уравнение

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (2.30)$$

называется уравнением Пуассона. Функция $u(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (2.29) в Ω , называется гармонической в области Ω . Обобщенная функция $E(x)$, удовлетворяющая равенству

$$\Delta E(x) = \delta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

в смысле распределений, называется фундаментальным решением уравнения Лапласа в \mathbb{R}^n .

Начнем с того, что построим фундаментальные решения в случаях $n = 2$ и $n = 3$.

Лемма 9 (непрерывность оператора дифференцирования.) Пусть $\{u_m(x)\}_{m=1}^{+\infty}$ – последовательность распределений $u_m(x) \in D'(\Omega)$. Пусть также $u_m \xrightarrow{D'} u$, $m \rightarrow \infty$. Тогда для любого $k = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_k} \xrightarrow{D'} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ – пробная функция. Тогда

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(\phi) = -u_m\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right).$$

Далее, так как $u_m \xrightarrow{D'} u$, $m \rightarrow \infty$, и $\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \in C_0^\infty(\Omega)$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) = u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right)$.

Отсюда, так как $\frac{\partial u}{\partial x_k}(\phi) = -u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right)$, получаем требуемое.

Пусть теперь $n = 2$. Заметим, что последовательность обобщенных функций

$$f_\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \varrho^2}, & |x| < \varrho, \\ 0, & |x| > \varrho \end{cases}$$

удовлетворяет условию

$$f_\varrho(x) \xrightarrow{D'} \delta_0(x), \quad \varrho \rightarrow 0+ . \quad (2.32)$$

Построим последовательность обобщенных функций $E_\varrho(x)$ таких, что

$$\Delta E_\varrho = f_\varrho. \quad (2.33)$$

Тогда, согласно (2.32), в силу леммы 9 получим, что искомое фундаментальное решение $E(x)$ является пределом последовательности $E_\varrho(x)$ в $D'(\mathbb{R}^2)$ при $\varrho \rightarrow 0+$.

Заметим, что в силу симметричности функций $f_\varrho(x)$ разумно искать $E_\varrho(x)$ в виде $E_\varrho(x) = E_\varrho(|x|)$. Переписывая (2.33) в полярных координатах, имеем

$$E_\varrho'' + \frac{1}{r} E_\varrho' = \begin{cases} \frac{1}{\pi \varrho^2}, & 0 < r < \varrho, \\ 0, & r > \varrho, \end{cases} \quad (2.34)$$

откуда

$$(rE'_\varrho)' = \begin{cases} \frac{r}{\pi\varrho^2}, & 0 < r < \varrho, \\ 0, & r > \varrho, \end{cases}$$

и далее, дважды интегрируя по r , получаем

$$E_\varrho(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{4\pi\varrho^2} + C_1 \ln r + C_3, & 0 < r < \varrho, \\ C_2 \ln r + C_4, & r > \varrho. \end{cases}$$

Заметим, что в силу теоремы о дифференцировании кусочно-гладкой функции (теорема 6.2.9, часть 1, глава 6), функции $E_\varrho(r)$ и $E'_\varrho(r)$ должны быть непрерывны при $\varrho = r$. Кроме того, из (2.34) следует, что функция $E_\varrho(r)$ определена с точностью до аддитивной постоянной, а значит, можно считать, что $C_4 = 0$. Отсюда получаем:

$$\frac{1}{2\pi} + C_1 = C_2, \quad \frac{1}{4\pi} + C_1 \ln \varrho + C_3 = C_2 \ln \varrho.$$

Потребовав также, чтобы функция $E_\varrho(r)$ была определена при $r = 0$, получим $C_1 = 0$. Таким образом,

$$E_\varrho(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varrho^2}r^2 + \frac{1}{2\pi} \ln \varrho - \frac{1}{4\pi}, & r < \varrho, \\ \frac{1}{2\pi} \ln r, & r > \varrho. \end{cases}$$

Отсюда, устремляя $\varrho \rightarrow 0+0$, получаем, что при $n = 2$ фундаментальное решение имеет вид: $E(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r$.

Пусть теперь $n = 3$. Тогда аналогично (2.32) имеем

$$f_\varrho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varrho^3}, & r < \varrho, \\ 0, & r > \varrho. \end{cases}$$

Отсюда аналогично (2.34) получаем

$$E''_\varrho + \frac{2}{r}E'_\varrho = f_\varrho,$$

и далее

$$(r^2E'_\varrho)' = \begin{cases} \frac{3r^2}{4\pi\varrho^3}, & r < \varrho, \\ 0, & r > \varrho, \end{cases}$$

$$E'_\varrho = \begin{cases} \frac{r}{4\pi\varrho^3} + \frac{C_1}{r^2}, & r < \varrho, \\ \frac{C_2}{r^2}, & r > \varrho, \end{cases}$$

и в итоге

$$E_\varrho = \begin{cases} \frac{r^2}{8\pi\varrho^3} - \frac{C_1}{r} + C_3, & r < \varrho, \\ -\frac{C_2}{r} + C_4, & r > \varrho. \end{cases}$$

Далее, как и для случая $n = 2$, получаем

$$C_4 = 0, \quad \frac{1}{4\pi\varrho^2} + \frac{C_1}{\varrho^2} = \frac{C_2}{\varrho^2}, \quad \frac{1}{8\pi\varrho} - \frac{C_1}{\varrho} + C_3 = -\frac{C_2}{\varrho}, \quad C_1 = 0.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{4\pi}, \quad C_3 = -\frac{3}{8\pi},$$

и в итоге

$$E_\varrho = \begin{cases} \frac{r^2}{8\pi\varrho^3} - \frac{3}{8\pi\varrho}, & r < \varrho, \\ -\frac{1}{4\pi r}, & r > \varrho. \end{cases}$$

откуда при $\varrho \rightarrow 0 + 0$ имеем $E(r) = -\frac{1}{4\pi r}$.

Теорема 53 Пусть $E(x)$ – обобщенная функция, являющаяся фундаментальным решением в \mathbb{R}^n для уравнения Лапласа, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция $u(x) = (E * f)(x)$ является решением уравнения Пуассона (2.30) в \mathbb{R}^n .

Доказательство. Из свойств свертки обобщенной и гладкой функций имеем $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Кроме того,

$$\Delta u = \Delta(E * f) = ((\Delta E) * f)(x) = (\delta_0 * f)(x) = \delta_0(f(x - \cdot)) = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 15 Вообще говоря, формула $u(x) = (E * f)(x)$ дает решение уравнения (2.30) и в случае, когда $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Упражнения к пункту 1.

1. Построить фундаментальное решение при $n = 4$.
2. Обосновать предельный переход при $\varrho \rightarrow 0 + 0$ при построении фундаментального решения (почему предел именно такой?).
3. Единственно ли фундаментальное решение? Почему?

6.2.2 Теоремы о среднем.

Обозначим $\alpha(n)$ объем единичного шара в \mathbb{R}^n . Заметим, что тогда $n\alpha(n)$ – площадь поверхности того же шара.

Теорема 54 (О среднем для гармонических функций.) Пусть $u(x) \in C^2(\Omega)$ – гармоническая функция. Тогда для любого шара $B(x, r) \subset \Omega$ имеет место равенство

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u dS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy \quad (2.35)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$\phi(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) dS_z.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(x + rz), z \rangle dS_z = \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla u(y), \frac{y-x}{r} \rangle dS_y = \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu_y} dS_y = \frac{r}{n\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\phi(r) = \text{const}$, и

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} u(y) dS_y = u(x).$$

В последнем равенстве использовано то, что $u \in C^2(\Omega)$, а также интегральная теорема о среднем.

Для интегрирования по шару, переходя к сферическим координатам, получаем

$$\int_{B(x,r)} u(y) dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,t)} u(y) dS_y \right) dt =$$

$$= u(x) \int_0^r n\alpha(n)t^{n-1}dt = \alpha(n)r^n u(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 55 (Обратная теорема о среднем.) Если функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u dS$$

для каждого шара $B(x,r) \subset \Omega$, то $u(x)$ – гармоническая функция.

Доказательство. Если $\Delta u(x) \neq 0$ для некоторой точки $x \in \Omega$, то в силу непрерывности вторых производных функции u найдется шар $B(x,r) \subset \Omega$ такой, что $\Delta u \neq 0$ в $B(x,r)$. Без ограничения общности, можно считать, что $\Delta u > 0$ в $B(x,r)$. Но тогда для функции $\phi(r)$ из теоремы 54 имеем

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0.$$

Противоречие.

6.2.3 Свойства гармонических функций.

Будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество.

Теорема 56 (Сильный принцип максимума.) Пусть $u(x) \in (C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))$ – гармоническая функция в Ω . Тогда:

- 1.) (принцип максимума): $\max\{u(x) \mid x \in \bar{\Omega}\} = \max\{u(x) \mid x \in \partial\Omega\}$.
- 2.) (сильный принцип максимума): если Ω связно и существует точка $x^0 \in \Omega$ такая, что $u(x^0) = \max\{u(x) \mid x \in \bar{\Omega}\}$, то $u(x) = \text{const}$ в Ω .

Доказательство. Заметим, что 2) \Rightarrow 1). Докажем утверждение 2). Пусть $x^0 \in \Omega$ и

$$M = u(x^0) = \max\{u(x) \mid x \in \bar{\Omega}\}.$$

Тогда при $0 < r < \text{dist}(x^0, \partial\Omega)$ по теореме о среднем имеем

$$M = u(x^0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x^0, r)} u(y) dy \leq M.$$

Так как равенство достигается только в том случае, когда $u(x) = M$ в $B(x^0, r)$, то получаем, что $u(y) = M \forall y \in B(x^0, r)$. Значит, множество $A_M = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ одновременно открыто и замкнуто в Ω , откуда и из связности Ω следует, что $A_M = \Omega$. Теорема доказана.

Замечание 16 *Заменяя $u(x)$ на $-u(x)$, получим аналогичные утверждения с \min вместо \max .*

Теорема 57 (Единственность.) *Пусть $g(x) \in C(\partial\Omega)$, $f(x) \in C(\Omega)$. Тогда существует не более одного решения $u(x) \in (C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))$ краевой задачи*

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = g \quad (2.36)$$

Доказательство. Пусть $u_1(x), u_2(x)$ – два решения (2.36) из указанного класса функций. Тогда функция $w(x) = u_1(x) - u_2(x) \in (C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))$ – гармоническая, откуда и из сильного принципа максимума следует утверждение теоремы.

Теорема 58 (Гладкость.) *Если $u \in C(\Omega)$ такова, что для каждого шара $B(x, r) \subset \Omega$ выполнено (2.35), то $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

и константа C выбрана так, что $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$. Положим $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Тогда по теореме о регуляризации функция $u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * u$ определена в $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ и $u_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Покажем, что функции $u(x)$ и $u_\varepsilon(x)$ совпадают в Ω_ε . Пусть $x \in \Omega_\varepsilon$, тогда

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \varepsilon^{-n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta(\frac{x-y}{\varepsilon}) u(y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon^{-n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y \right) dr = \\
&= \varepsilon^{-n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n \alpha(n) r^{n-1} dr = u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y) dy = u(x).
\end{aligned}$$

Таким образом, для достаточно малого произвольного $\varepsilon > 0$ функции $u(x)$ и $u_\varepsilon(x)$ совпадают в Ω_ε . Отсюда $u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Для гармонических функций справедливо также следующее утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Теорема 59 (Теорема Лиувилля.) Пусть $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гармоническая и ограниченная функция. Тогда $u(x) = \text{const}$.

Упражнение к пункту 3: Провести подробное доказательство теоремы 57.

6.2.4 Вариационное исчисление.

Пусть $g(x) \in C(\partial\Omega)$, $f(x) \in C(\Omega)$. Обозначим $I[w] = \int_\Omega (\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + wf) dx$ – функционал энергии, где $w(x)$ принадлежит допустимому множеству $\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A} = \{\varpi \in C^\varepsilon(\overline{\Omega}) \mid \varpi|_{\partial\Omega} = g\}$.

Теорема 60 (Принцип Дирихле.) Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение краевой задачи (2.36). Тогда

$$I[u] = \min\{I[w] \mid w \in \mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}\}. \quad (2.37)$$

Обратно, если $u \in \mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}$ удовлетворяет (2.37), то $u(x)$ – решение (2.36).

Доказательство. 1. Пусть $w \in \mathcal{A}$. Тогда для функции $u(x)$ – решения (2.36) имеем

$$0 = \int_\Omega (\Delta u(x) - f(x))(u(x) - w(x)) dx,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$0 = \int_\Omega (\langle -\nabla u, \nabla(u - w) \rangle(x) - f(x)(u(x) - w(x))) dx,$$

и далее

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u(x)f(x))dx &= \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla w \rangle (x) + f(x)w(x))dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 + f(x)w(x)\right)dx.\right. \end{aligned}$$

При этом при переходе к неравенству были использованы соотношения

$$|\langle \nabla u, \nabla w \rangle| \leq |\nabla u||\nabla w| \leq \frac{|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2}{2}.$$

Отсюда $I[u] \leq I[w]$ для всех $w \in \mathcal{A}$. Так как $u \in \mathcal{A}$, то отсюда следует (2.37).

2. Пусть теперь выполнено соотношение (2.37). Зафиксируем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, и положим $l(\tau) = I(u + \tau v)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Так как для любого $\tau \in \mathbb{R}$ верно $u + \tau v \in \mathcal{A}$, то функция $l(\tau)$ достигает минимума при $\tau = 0$. Значит, $\frac{d}{d\tau}l(0) = 0$, если производная существует. Однако,

$$\begin{aligned} l(\tau) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u + \tau \nabla v|^2 + (u + \tau v)(x)f(x)\right)dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \tau \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \frac{1}{2}\tau^2|\nabla v|^2 + (u + \tau v)f\right)dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$0 = l'(0) = \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + fv)dx = \int_{\Omega} (-\Delta u + f)v dx,$$

и это равенство справедливо для любой $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда по теореме 6.2.1 (часть 1, глава 6) получаем, что $\Delta u = f$ в Ω , а значит, $u(x)$ – решение (2.36). Теорема доказана.

6.2.5 Случай $n = 3$. Электростатическая интерпретация.

Изучим более подробно частный случай $n = 3$. В этом случае функцию $u(x)$ – решение уравнения Пуассона (2.30) с точностью до постоянного

множителя (связанного с выбранными единицами измерения) и знака можно интерпретировать как потенциал электрического поля объемного распределения зарядов с плотностью $f(x)$. В частности, фундаментальное решение $\mathcal{A}\uparrow\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ есть (с точностью до постоянного множителя) потенциал точечного заряда $+1$, сосредоточенного в начале координат.

Далее, уравнение Пуассона (2.30) можно переписать в виде $\operatorname{div}\nabla u = f(x)$. Интегрируя это равенство по произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, получаем:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle dS_x = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

В электростатике вектор градиента потенциала $E(x) = \nabla u$ с точностью до постоянного множителя есть вектор напряженности электрического поля в точке x , соответствующего потенциалу $u(x)$. Кроме того, $Q(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$ можно проинтерпретировать как заряд области Ω . Отсюда следует, что уравнение Пуассона (2.30) можно переписать в виде

$$\int_{\partial\Omega} \langle E(x), \nu \rangle dS_x = Q(\Omega). \quad (2.38)$$

Такая запись уравнения Пуассона в формулировке *поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен суммарному заряду внутри этой поверхности* называется в электростатике теоремой Гаусса. С помощью равенства (2.38) можно вычислять потенциал в \mathbb{R}^3 в тех случаях, когда распределение заряда можно представить в виде суммы распределений, имеющих сферическую симметрию. Действительно, если $f(x)$ обладает сферической симметрией, т.е. $f(x) = f(|x|)$, то соответствующая такому распределению зарядов напряженность электрического поля также зависит только от $|x|$, и уравнение (2.38) можно переписать в виде

$$4\pi r^2 \tilde{E}(r) = Q(B(0, r)),$$

где $\tilde{E}(|x|)\nu = E(x)$, ν – единичный вектор, направленный из начала координат в точку x . Далее, из равенства $E(x) = \nabla u(x)$ нетрудно найти функцию $u(x)$ – решение уравнения Пуассона.

6.2.6 Случай $n = 3$. Функция Грина. Метод отраженных зарядов.

Пусть теперь Ω – произвольная область в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим граничную задачу

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Эту задачу можно с точки зрения электростатики интерпретировать следующим образом: в области Ω распределены заряды с объемной плотностью $f(x)$. На границе области находится заземленная проводящая оболочка. Требуется найти потенциал электрического поля в Ω . Принцип суперпозиции зарядов (физическая переформулировка свойства линейности уравнения Пуассона) подсказывает следующую идею: найти потенциал единичного точечного заряда, сосредоточенного в точке $y \in \Omega$, а затем проинтегрировать полученную функцию по всем точкам Ω с весом $f(y)$.

Определение 4 Функция $G(x, y): \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, гладкая при $x \neq y$, называется функцией Грина для области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y), & (x, y) \in \Omega \times \Omega, \\ G(x, y)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \\ G(x, y) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.40)$$

Заметим, что требование $G(x, y) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$ обеспечивает единственность функции Грина для неограниченных областей. Кроме того, нетрудно видеть, что функция Грина – фундаментальное решение, удовлетворяющее краевым условиям и имеющее требуемое асимптотическое поведение при $|x| \rightarrow \infty$. Из этого факта сразу вытекает следующая теорема.

Теорема 61 Пусть Ω – ограниченная область, $f(x) \in C^2(\Omega)$. Решение задачи Дирихле (2.39) имеет вид

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy.$$

В случае областей с простой геометрией функцию Грина можно построить с помощью метода отраженных зарядов.

Пример. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0\}$. Тогда функция Грина – потенциал поля, создаваемого точечным зарядом $+1$, сосредоточенным в точке y над плоскостью $x_3 = 0$ заземленного проводника. Заметим, что силовые линии электрического поля ортогональны к плоскости проводника, т.к. иначе свободные заряды в проводнике пришли бы в движение. Заметим теперь, что если поместить в точку $\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3)$, симметричную точке y относительно плоскости $x_3 = 0$, точечный заряд -1 , то силовые линии поля, создаваемого во всем пространстве парой зарядов, будут в области Ω совпадать с силовыми линиями искомого поля. Отсюда сразу получаем, что

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - \bar{y}|} \right).$$

Метод отраженных зарядов можно использовать также и для отражения относительно сфер, однако в этом случае отраженный заряд будет не равен исходному по модулю, а пропорционален ему.

С математической точки зрения метод отраженных зарядов является аналогом методов четного и нечетного продолжения для решения смешанной задачи для волнового уравнения.

Упражнение к пункту 6: Провести подробное доказательство теоремы 61.

6.2.7 Случай $n = 2$. Применение конформных отображений.

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, функция $u(x_1, x_2)$ – гармоническая в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Положим $x = x_1 + ix_2$. Тогда функцию $u(x)$ можно рассматривать как гармоническую функцию комплексного переменного. Из курса комплексного анализа известно, что конформные отображения переводят гармонические функции в гармонические. Воспользуемся этим фактом для построения решений задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – открытая односвязная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, содержащей не менее двух точек. Рассмотрим сначала краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x), \\ u(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (2.41)$$

Зафиксируем точку $y \in \Omega$. По теореме Римана найдется конформное отображение $\Phi_y: \Omega \rightarrow B(0, 1)$, причем $\Phi_y(y) = 0$. Выпишем задачу в единичном круге, соответствующую задаче (2.41). Пусть $z \in B(0, 1)$, $v(z) = u(\Phi_y^{-1}(z))$, $x = \Phi_y^{-1}(z)$. Тогда для гармонической функции $v(z)$ получаем

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & z \in B(0, 1) \\ v|_{|z|=1} = g(\Phi_y^{-1}(z)). \end{cases} \quad (2.42)$$

Задачу (2.42) достаточно часто оказывается нетрудно решить с помощью метода Фурье.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.43)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 62 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой неодноточечной границей. Пусть также $\Phi_y: \Omega \rightarrow B(0, 1)$ – конформное отображение, соответствующее $y \in \Omega$, такое, что $\Phi_y(y) = 0$. Тогда функция Грина, соответствующая области Ω , имеет вид

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |\Phi_y(x)|,$$

и решение задачи (2.43) записывается в виде

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln |\Phi_y(x)| f(y) dy.$$

6.2.8 Представление функции в виде суммы трех потенциалов. Задача Неймана для уравнения Лапласа.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Из формулы Остроградского

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{a}, \nu \rangle dS_x = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx,$$

полагая $\vec{a} = u\nabla v - v\nabla u$, с помощью равенства $\operatorname{div}(u\nabla v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle + u\Delta v$ получаем формулу Грина

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS_x = \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx. \quad (2.44)$$

Пусть теперь $y \in \Omega$ – фиксированная точка, $v_*(x)$ – решение задачи $\Delta v_*(x) = \delta(x - y)$, т.е. $v_*(x) = E(x - y)$, где $E(x)$ – фундаментальное решение в \mathbb{R}^n . Подставляя формально $v_*(x)$ в формулу Грина (2.44), получаем:

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v_*(x)}{\partial \nu_x} - v_*(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS_x = \int_{\Omega} (u\Delta_x v_*(x) - v_*(x)\Delta u) dx.$$

Отсюда получаем

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial v_*(x)}{\partial \nu_x} dS_x - \int_{\partial\Omega} v_*(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} dS_x + \int_{\Omega} v_*(x) \Delta u(x) dx. \quad (2.45)$$

Формула (2.45) называется представлением функции $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ в виде суммы трех потенциалов. Из этой формулы, в частности, непосредственно вытекает представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона: если функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g(x), \end{cases}$$

где $f(x) \in C(\Omega)$, $g(x) \in C(\partial\Omega)$, а $G(x, y)$ – функция Грина для области Ω , то выбирая $v_*(x) = G(x, y)$, из представления функции в виде суммы трех потенциалов сразу получаем

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} dS_x + \int_{\Omega} G(x, y) f(x) dx.$$

Рассмотрим теперь задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = g(x). \end{cases} \quad (2.46)$$

При этом предполагается, что $g(x) \in C(\partial\Omega)$. Заметим, что задача Неймана разрешима не для всех функций $g(x) \in C(\partial\Omega)$. Действительно, если $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ – решение задачи (2.46), то

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS_x = \int_{\partial\Omega} g(x) dS_x,$$

т.е. для разрешимости задачи (2.46) необходимо, чтобы было выполнено условие

$$\int_{\partial\Omega} g(x) dS_x = 0. \quad (2.47)$$

Пусть это условие выполнено. Оказывается, имеет место единственность решения задачи Неймана с точностью до аддитивной постоянной:

Теорема 63 *Если $u_1(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и $u_2(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ – два решения задачи (2.46), тогда найдется константа $C \in \mathbb{R}$ такая, что $u_1(x) - u_2(x) = C$, и наоборот.*

Доказательство. Положим $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Тогда функция $v(x)$ – решение задачи Неймана (2.46) для случая $g(x) = 0$. Положим $\vec{a} = v\nabla v$, тогда из формулы Остроградского имеем

$$\int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} dS_x = \int_{\Omega} (|\nabla v(x)|^2 + v(x)\Delta v(x)) dx,$$

и в силу того, что функция $v(x)$ – решение задачи (2.46) с $g(x) = 0$, получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx = 0,$$

откуда $\nabla v(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$, т.е. $v(x) = \text{const}$. Доказательство в обратную сторону получается непосредственной подстановкой. Теорема доказана.

6.3 Уравнение теплопроводности.

6.3.1 Основные определения. Фундаментальное решение.

Основной целью этого раздела является изучение уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.48)$$

где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – область, и неоднородного уравнения

$$u_t - \Delta u = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.49)$$

где функция $f: [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ задана. Начнем с того, что построим частное решение $u_A(t, x)$ уравнения (3.48) специальной структуры:

$$u_A(t, x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad (3.50)$$

где параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и функцию $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ надо определить. Подставляя (3.50) в (3.48), получаем:

$$-\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{\beta}{t^{\alpha+\beta+1}} \langle x, \nabla v \rangle - \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v = 0.$$

Положим $y = t^{-\beta}x$, $\beta = \frac{1}{2}$. Тогда все степени t будут одинаковы, и тем самым имеем:

$$\alpha v + \frac{1}{2} \langle y, \nabla v \rangle + \Delta v = 0.$$

Допустим, что $v(y) = w(|y|)$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$\alpha w + \frac{r}{2} w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0.$$

Выбрав $\alpha = \frac{n}{2}$, получим отсюда

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' = 0,$$

и далее

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a,$$

где $a \in \mathbb{R}$. Полагая $\lim_{r \rightarrow \infty} w = \lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$, получаем, что $a = 0$, откуда $w' = -\frac{1}{2}rw$, а значит,

$$w(r) = be^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Отсюда, учитывая выбор α, β , получаем

$$u_A(t, x) = b \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Определим обобщенную функцию

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t < 0. \end{cases}$$

Выбор нормировочной константы $b = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$ связан со следующим простым утверждением.

Лемма 10 *Для любого $t > 0$ имеет место равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) dx = 1.$$

Заметим, что при $(t, x) \neq (0, 0)$ функция $\Phi(t, x)$ является решением уравнения теплопроводности (3.48). Следовательно, для любого фиксированного $y \in \mathbb{R}^n$ при $x \neq y$ функция $\Phi(t, x - y)$ – также решение уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.51)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 64 *Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Определим функцию $u(t, x)$ равенством*

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y) g(y) dy. \quad (3.52)$$

Тогда:

1. $u \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$.
2. $u_t - \Delta u = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\lim_{(t, x) \rightarrow (0, x^0), t > 0} u = g(x^0) \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. 1. Так как $t^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ – бесконечно дифференцируемая функция при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, и интегралы от производных функции $u(t, x)$ равномерно сходятся на $[\delta, +\infty) \times V$ при любых $\delta > 0$ и $V \subseteq \mathbb{R}^n$, то функция $u(t, x) \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Кроме того,

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta_x \Phi)(t, x - y)g(y)dy = 0$$

в силу свойств функции $\Phi(t, x)$.

2. Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon$, если $|y - x^0| < \delta$, $y \in \mathbb{R}^n$. Если $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, то согласно лемме 10 имеем

$$\begin{aligned} |u(t, x) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y)(g(y) - g(x^0))dy \right| \leq \\ &\leq \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(t, x - y)|g(y) - g(x^0)|dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(t, x - y)|g(y) - g(x^0)|dy = I + J. \end{aligned}$$

Далее,

$$I \leq \varepsilon \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(t, x - y)dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y)dy = \varepsilon.$$

Кроме того, если $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ и $|y - x^0| \geq \delta$, то $|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|$, откуда $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$. Отсюда

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(t, x - y)dy \leq \\ &\leq \frac{\text{const}}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right)dy \leq \\ &\leq \frac{\text{const}}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \exp\left(-\frac{|y - x^0|^2}{16t}\right)dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{const}}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{n-1} dr \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0 + 0$. Таким образом, если $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ и $t > 0$ достаточно мало, то $|u(t, x) - g(x^0)| < 2\varepsilon$. Теорема доказана.

Замечание 17 Если функция $g(x) \geq 0$, $g(x^0) \neq 0$ для некоторого $x^0 \in \mathbb{R}^n$, и удовлетворяет условиям теоремы 64, то функция $u(t, x)$, определенная формулой (3.52), будет положительной во всех точках полупространства $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Это утверждение можно интерпретировать так, что уравнение теплопроводности инициирует бесконечную скорость распространения возмущений.

Упражнение к пункту 1: Доказать лемму 10 (прямым вычислением).

6.3.2 Неоднородная задача.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу Коши

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Заметим, что для любого фиксированного $s \in (0, t)$ функция

$$u(t, x, s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t - s, x - y) f(s, y) dy$$

является в силу теоремы 64 решением задачи

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & t > s, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=s} = f(s, x). \end{cases} \quad (3.54)$$

Принцип Дюамеля утверждает, что можно построить решение задачи (3.53) из решений задачи (3.54) интегрированием по s . Положим

$$u(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t - s, x - y) f(s, y) dy ds. \quad (3.55)$$

Теорема 65 (Принцип Дюамеля.) Пусть $f(t, x) \in C_0^{1,2}([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Тогда функция $u(t, x)$, определенная формулой (3.55), обладает следующими свойствами:

- 1) $u \in C^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$.
- 2) $u_t - \Delta u = f(t, x)$.
- 3) $\lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (0, x^0) \\ t > 0, x \in \mathbb{R}^n}} u(t, x) = 0 \quad \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству теоремы 64. Сделаем замену переменных в (3.55):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s, y) dy ds = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) f(t-s, x-y) dy ds. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Так как функция $f(t, x)$ финитна и дважды непрерывно дифференцируема по x_j , однократно непрерывно дифференцируема по t , а функция $\Phi(s, y)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, то, дифференцируя интеграл (3.56) по параметрам t, x_j , получаем:

$$\begin{aligned} u_t &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) f_t(t-s, x-y) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, y) f(0, x-y) dy, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t-s, x-y) dy ds. \end{aligned}$$

Таким образом, $u(t, x) \in C^{1,2}((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Подставляя вычисленные явно производные в левую часть уравнения в (3.53), получаем:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) ((\partial_t - \Delta_x) f(t-s, x-y)) dy ds + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, y) f(0, x-y) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) ((\partial_t - \Delta_x) f(t - s, x - y)) dy ds + \\
&+ \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) ((\partial_t - \Delta_x) f(t - s, x - y)) dy ds + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, y) f(0, x - y) dy = I_{\varepsilon} + J_{\varepsilon} + K.
\end{aligned}$$

Далее,

$$|J_{\varepsilon}| \leq (\|f_t\|_{L_{\infty}} + \|D_x^2 f\|_{L_{\infty}}) \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) dy ds \leq C\varepsilon,$$

интегрируя I_{ε} по частям и учитывая, что внеинтегральные члены пропадут в силу финитности $f(t, x)$, получаем

$$\begin{aligned}
I_{\varepsilon} &= \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s, y) ((\partial_t - \Delta_x) f(t - s, x - y)) dy ds = \\
&= \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^n} ((\partial_s - \Delta_y) \Phi(s, y)) f(t - s, x - y) dy ds + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t - \varepsilon, x - y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, y) f(0, x - y) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t - \varepsilon, x - y) dy - K
\end{aligned}$$

в силу того, что $(\partial_s - \Delta_y) \Phi(s, y) = 0$ при $s > 0$. Отсюда

$$u_t - \Delta u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t - \varepsilon, x - y) dy = f(t, x),$$

предел вычисляется аналогично подобному пределу в доказательстве теоремы 64.

Кроме того,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty} t \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0.$$

Поэтому, свойство 3 для функции $u(t, x)$, определенной формулой (3.55), также выполнено. Теорема доказана.

Упражнение к пункту 2: Провести подробное доказательство того, что в условиях теоремы 65 верно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t - \varepsilon, x - y) dy = f(t, x).$$

6.3.3 Теоремы о стабилизации.

Пусть теперь $n = 1$, $u(t, x)$ – определенное формулой (3.52) решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = g(x). \end{cases} \quad (3.57)$$

Оказывается, что для некоторых классов функций $g(x)$ существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x)$. Теоремы, утверждающие этот факт, носят название теорем о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Теорема 66 Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ – периодическая функция. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = g_0,$$

где g_0 – нулевой коэффициент разложения функции $g(x)$ в ряд Фурье (пространственное среднее функции $g(x)$).

Доказательство. Пусть $2l$ – период функции $g(x)$. Тогда, разлагая $g(x)$ в ряд Фурье, получаем

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k \exp\left(\frac{k\pi i x}{l}\right).$$

Этот ряд сходится равномерно в силу непрерывности $g(x)$, что позволяет переставлять суммирование и интегрирование после подстановки ряда в

формулу (3.52). Подставляя явно, получаем:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy = \\
 &= \frac{g_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy + \\
 &+ \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g_k \exp\left(\frac{k\pi i x}{l}\right) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy + \\
 &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g_k \exp\left(\frac{k\pi i x}{l}\right) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy.
 \end{aligned}$$

Первый из интегралов равен g_0 . Покажем, что остальные слагаемые стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Для этого выделим полный квадрат под знаком экспоненты:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{k\pi i x}{l}\right) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{4k\pi i t}{l} - \frac{4k\pi^2 t^2}{l^2}\right) \cdot \\
 &\cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y - (x + \frac{2k\pi i t}{l}))^2}{4t}\right) dy = \\
 &= \exp\left(\frac{4k\pi i t}{l} - \frac{4k\pi^2 t^2}{l^2}\right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

Следовательно, все слагаемые в представлении $u(t, x)$ в виде суммы, кроме первого, стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда следует требуемое. Теорема доказана.

Теорема 67 Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_{\infty}(\mathbb{R})$, и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = B$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = \frac{A+B}{2}.$$

Доказательство. Представим $g(x)$ в виде суммы $g(x) = g_+(x) + g_-(x)$, где $g_+(x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(-x))$, $g_-(x) = \frac{1}{2}(g(x) - g(-x))$ – четная и нечетная ее части. Тогда из формулы (3.52) получаем

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g_+(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g_-(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy.$$

Сделав в интегралах замену $z = \frac{y-x}{2\sqrt{t}}$, имеем:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x + 2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_-(x + 2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_-(2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (g_+(x + 2z\sqrt{t}) - g_+(2z\sqrt{t})) \exp(-z^2) dz + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (g_-(x + 2z\sqrt{t}) - g_-(2z\sqrt{t})) \exp(-z^2) dz = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_-(2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + 2z\sqrt{t}) - g(2z\sqrt{t})) \exp(-z^2) dz.$$

В последнем равенстве второй интеграл равен нулю, т.к. подынтегральная функция нечетная, а промежуток интегрирования симметричен. Оценивая третий интеграл, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + 2z\sqrt{t}) - g(2z\sqrt{t})) \exp(-z^2) dz \right| \leq \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x + 2z\sqrt{t}) - g(2z\sqrt{t})| \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x + 2z\sqrt{t}) - g(2z\sqrt{t})) \exp(-z^2) dz \right| \leq \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(2\sqrt{t}(z + \frac{x}{2\sqrt{t}})) - g(2z\sqrt{t})|. \end{aligned}$$

Заметим, что супремум в правой части стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ в силу непрерывности функции g .

Преобразуя первый интеграл, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(2z\sqrt{t}) \exp(-z^2) dz = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(g_+(2z\sqrt{t}) - \frac{A+B}{2} \right) \exp(-z^2) dz + \frac{A+B}{2}. \end{aligned}$$

В этом выражении интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ в силу явного вида функции $g_+(x)$ и равенств $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = B$. Теорема доказана.

Теорема 68 Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, и существует предел

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(x) dx = A.$$

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = A.$$

Доказательство. Обозначим $G(x) = \int_0^x g(s)ds$. Тогда

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{G(l) - G(-l)}{2l} = A.$$

Пусть $G_+(x)$ и $G_-(x)$ – четная и нечетная части функции $G(x)$ соответственно. Подставляя $g(x)$ в формулу (3.52) и интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy = \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} G(l) \exp\left(-\frac{(l-x)^2}{4t}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} G(-l) \exp\left(-\frac{(-l-x)^2}{4t}\right) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(y) \frac{x-y}{2t} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_-(y) \frac{x-y}{2t} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4t}\right) dy = L + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Так как $g(x) \in L_\infty(\mathbb{R})$, то

$$|G(x)| \leq \|g\|_{L_\infty} |x|.$$

Отсюда для достаточно больших l

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} G(l) \exp\left(-\frac{(l-x)^2}{4t}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} G(-l) \exp\left(-\frac{(-l-x)^2}{4t}\right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\pi t}} \|g\|_{L_\infty} l \exp\left(-\frac{l^2}{4t}\right). \end{aligned}$$

Так как при каждом фиксированном t правая часть последней оценки стремится к нулю при $l \rightarrow +\infty$, то $L = 0$. Далее,

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(x + 2z\sqrt{t}) z \exp(-z^2) dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(2z\sqrt{t}) + G(-2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x + 2z\sqrt{t}) - G(2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(-x - 2z\sqrt{t}) - G(-2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz.
\end{aligned}$$

Первый из интегралов равен нулю, так как подынтегральная функция четная, а промежуток интегрирования симметричен. Модули второго и третьего интегралов могут быть оценены следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\pm(x + 2z\sqrt{t})) - G(\pm 2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{G(x + 2z\sqrt{t}) - G(2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) \right| dz \leq \\
&\leq \frac{\|g\|_{L_\infty} |x|}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \exp(-z^2) dz \leq \frac{\text{const } |x|}{\sqrt{t}} \|g\|_{L_\infty} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_-(x + 2z\sqrt{t}) z \exp(-z^2) dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(2z\sqrt{t}) - G(-2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x + 2z\sqrt{t}) - G(2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(-x - 2z\sqrt{t}) - G(-2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz.$$

Последние два интеграла стремятся к нулю, как было показано ранее, а первый может быть преобразован как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(2z\sqrt{t}) - G(-2z\sqrt{t})}{2} z \exp(-z^2) dz = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{G(2z\sqrt{t}) - G(-2z\sqrt{t})}{2z\sqrt{t}} - 2A \right) z^2 \exp(-z^2) dz + \\ & \quad + \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \exp(-z^2) dz. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю в силу того, что

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{G(l) - G(-l)}{2l} = A.$$

Осталось заметить, что второе слагаемое в точности равно A . Теорема доказана.

6.3.4 Сильный принцип максимума в ограниченной области.

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество, $T > 0$ – фиксированное число. Обозначим $\Omega_T = (0, T] \times \Omega$ – параболический цилиндр, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$ – параболическая граница. Заметим, что Γ_T – "стакан" т.е. не содержит $\{t = T\} \times \Omega$.

Зафиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Определение 5 *Множество*

$$E(t_0, x^0, r) = \left\{ (s, y) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \mid s \leq t_0, \Phi(t_0 - s, x^0 - y) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

будем называть тепловым шаром.

Заметим, что при $r \rightarrow 0+0$ тепловой шар $E(t_0, x^0, r)$ стягивается в точку (t_0, x^0) . Кроме того, оказывается, имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 11 *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0, x^0, r)} \frac{|y - x^0|^2}{(t - s)^2} dy ds = 1 \quad (3.58)$$

Более того, для уравнения теплопроводности имеет место теорема о среднем, которую мы приведем без доказательства:

Теорема 69 (Теорема о среднем для уравнения теплопроводности). *Пусть функция $u(t, x) \in C^{1,2}(\Omega_T)$ – решение уравнения теплопроводности 3.48. Тогда для любого теплового шара $E(t, x, r)$, лежащего в Ω_T , имеет место равенство*

$$u(t, x) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t, x, r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds. \quad (3.59)$$

Аналогично ситуации для уравнения Лапласа, из теоремы о среднем вытекает сильный принцип максимума в ограниченной области:

Теорема 70 (Принцип максимума в Ω_T) *Пусть $u(t, x) \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\Gamma_T)$ – решение уравнения теплопроводности (3.48) в Ω_T . Тогда:*

1. $\max_{\overline{\Omega_T}} u(t, x) = \max_{\Gamma_T} u(t, x)$;
2. Если Ω связное и существует $(t_0, x^0) \in \Omega_T$ такое, что $u(t_0, x^0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u(t, x)$, то $u(t, x)$ – константа в Ω_{t_0} .

Доказательство. Заметим, что первое утверждение теоремы является следствием второго. Докажем второе утверждение. Пусть существует точка $(t_0, x^0) \in \Omega_T$ такая, что $u(t_0, x^0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u(t, x) = M$. Тогда для достаточно малого $r > 0$ тепловой шар $E(t_0, x^0, r)$ лежит в Ω_T . Используя теорему о среднем и лемму 11, получаем

$$M = u(t_0, x^0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0, x^0, r)} u(s, y) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds \leq$$

$$\leq M \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0, x^0, r)} \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds \leq M.$$

Отсюда $u(s, y) = M$ для всех $(s, y) \in E(t_0, x^0, r)$. Пусть теперь L – отрезок, лежащий в Ω_T и соединяющий точку (t_0, x^0) с некоторой точкой (t_1, y^0) , причем $t_1 < t_0$. Покажем, что $u(t, x) = M$ во всех точках (t, x) отрезка L . Для этого положим

$$t_* = \min\{\tau \geq t_1 \mid u(t, x) = M \forall (t, x) \in L, \tau \leq t \leq t_0\}.$$

Заметим, что указанное множество непусто, т.к. содержит точку (t_0, x^0) , и минимум достигается в силу непрерывности функции $u(t, x)$. Пусть моменту времени t_* соответствует точка $(t_*, x^*) \in L$. Выберем $r_1 > 0$ настолько малым, что тепловой шар $E(t_*, x^*, r_1)$ лежит в Ω_T . Заметим, что если $t_* > t_1$, то для любого $r_1 > 0$ часть отрезка L лежит в этом шаре. Но аналогично ситуации для точки (t_0, x^0) имеем $u(t, x) = M$ во всех точках теплового шара $E(t_*, x^*, r_1)$. Следовательно, если $t_* > t_1$, то t_* не является минимумом множества $\{\tau \geq t_1 \mid u(t, x) = M \forall (t, x) \in L, \tau \leq t \leq t_0\}$. Значит, $t_* = t_1$, а следовательно, $u(t, x) = M$ во всех точках отрезка L . Зафиксируем теперь $t \in [0, t_0)$, $x \in \Omega$. Если Ω связно, то найдется ломаная $\tilde{L} = \{x^0, \dots, x^m = x\}$, лежащая в Ω . Выберем t_1, \dots, t_{m-1} так, что $t = t_m < t_{m-1} < \dots < t_1 < t_0$. Тогда отрезки, соединяющие точки (t_j, x_j) и (t_{j+1}, x_{j+1}) , лежат в Ω_T для каждого $j = 0, \dots, m-1$. Но согласно сказанному выше, на каждом из этих отрезков $u(s, y) = M$. Следовательно, $u(t, x) = M$. Теорема доказана.

Следствие 10 (Единственность в Ω_T) Пусть $g(t, x) \in C(\Gamma_T)$, $f(t, x) \in C(\Omega_T)$. Тогда существует не более одного решения $u(t, x) \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\Gamma_T)$ смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x), & (t, x) \in \Omega_T, \\ u|_{\Gamma_T} = g(t, x). \end{cases}$$

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству теоремы 57.

Упражнения к пункту 4:

1. Прямым вычислением проверить равенство (3.59).
2. Доказать следствие 10.

6.3.5 Принцип максимума в полосе.

Определение 6 Пусть $T > 0$. Будем говорить, что функция $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t, x) \in C^{1,2}((0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ принадлежит классу Тихонова $T_{A,a}$, если существуют константы $A > 0$, $a > 0$ такие, что для любого $t \in [0, T]$ и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|u(t, x)| \leq A \exp(a|x|^2). \quad (3.60)$$

Теорема 71 (Принцип максимума в полосе.) Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$, и функция $u(t, x) \in T_{A,a}$ – решение задачи Коши (3.51). Тогда

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} u(t, x) = \sup_{\mathbb{R}^n} g(x).$$

Доказательство. Пусть сначала $4aT < 1$. Тогда найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $4a(T + \varepsilon) < 1$. Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$ и положим

$$v(t, x) = u(t, x) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right).$$

Прямым вычислением можно показать, что $v_t - \Delta v = 0$. Зафиксируем $r > 0$ и положим $\Omega = B(y, r)$. Тогда $\Omega_T = (0, T] \times B(y, r)$, и функция $v(t, x)$ удовлетворяет теореме 70 в Ω_T . Значит,

$$\max_{\overline{\Omega_T}} v(t, x) = \max_{\Gamma_T} v(t, x).$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$v(0, x) = u(0, x) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(T + \varepsilon)}\right) < u(0, x) = g(x).$$

Тем самым, на "дне стакана" Γ_T имеет место неравенство $v(t, x) \leq g(x)$. Покажем, что при достаточно большом $r > 0$ такое же неравенство имеет место и на "боковой стенке" т.е. при $|x - y| = r$. Действительно, в этом случае в силу (3.60) имеем:

$$v(t, x) = u(t, x) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq A \exp(a|x|^2) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq A \exp(a(|y| + r)^2) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

В силу неравенства $4a(T + \varepsilon) < 1$ имеем $\frac{1}{4(T + \varepsilon)} = a + \gamma$, $\gamma > 0$. Отсюда на боковой стенке Γ_T получаем:

$$v(t, x) \leq A \exp(a(|y| + r)^2) - \mu(4(a + \gamma))^{\frac{n}{2}} \exp((a + \gamma)r^2).$$

Так как правая часть при достаточно большом r становится сколь угодно сильно отрицательной, то

$$v(t, x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g(x).$$

Таким образом, $\max_{\Gamma_T} v(t, x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g(x)$, откуда $v(t, x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g(x)$ для всех $(t, x) \in \Omega_T$, и, в частности, $v(t, y) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g(x)$. Отсюда в силу произвольности выбора $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, устремив $\mu \rightarrow 0 + 0$ получаем

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} u(t, x) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g(x).$$

Если же $4aT \geq 1$, то применим приведенное выше рассуждение для $t \in [0, \frac{1}{8a}]$, затем сделаем замену $\tau_1 = t - \frac{1}{8a}$. Тогда в новых переменных $u(\tau_1, x)$ удовлетворяет тому же уравнению, и к ней опять можно применить то же рассуждение, что и выше, но уже для $\tau_1 \in [0, \frac{1}{8a}]$. Далее сделаем замену $\tau_2 = \tau_1 - \frac{1}{8a}$, и т.д.. Тем самым, за конечное число шагов мы исчерпаем весь промежуток $[0, T]$, и в каждой из полос будет иметь место требуемое неравенство. Теорема доказана.

Следствие 11 (Единственность решения задачи Коши.) Пусть $g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(t, x) \in C([0, T] \times \mathbb{R}^n)$. Пусть также $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – константы. Тогда существует не более одного решения $u(t, x) \in T_{\alpha, \beta}$ задачи Коши

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t, x), & t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = g(x). \end{cases}$$

Упражнение к пункту 5: Доказать следствие 11.

6.3.6 Гладкость решений.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Обозначим $C(t_0, x^0, r) = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x^0 - y| \leq r, t_0 - r^2 \leq s \leq t_0\}$ – круговой цилиндр высоты r^2 с радиусом основания r и центром верхнего основания в точке (t_0, x^0) . Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема 72 (Гладкость решений уравнения теплопроводности).

Пусть $u(t, x) \in C^{1,2}(\Omega_T)$ – решение уравнения теплопроводности в Ω_T . Тогда $u(t, x) \in C^\infty(\Omega_T)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $(t_0, x^0) \in \Omega_T$ и выберем r настолько малым, что цилиндр $C(t_0, x^0, r)$ содержится в Ω_T . Обозначим для краткости $C = C(t_0, x^0, r)$, $C' = C(t_0, x^0, \frac{3}{4}r)$, $C'' = C(t_0, x^0, \frac{1}{2}r)$. Выберем срезающую функцию $\xi(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ так, что $\xi(t, x) = 1$ при $(t, x) \in C'$, и $\xi(t, x) = 0$ при $t \leq t_0$, $(t, x) \notin C$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\Omega_{T,\varepsilon} = \{(t, x) \in \Omega_T \mid \text{dist}((t, x), \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Пусть также $\eta_\varepsilon(t, x)$ – стандартное усредняющее ядро, $u_\varepsilon(t, x) = (u * \eta_\varepsilon)(t, x)$. Определим также $v_\varepsilon(t, x) = \xi(t, x)u_\varepsilon(t, x)$. Заметим, что при достаточно малом r функция v_ε имеет следующие свойства: $v_\varepsilon|_{t=0} = 0$, $v_\varepsilon(t, x) = u_\varepsilon(t, x)$ при $(t, x) \in C'$, $v_\varepsilon(t, x) = 0$ при $t \leq t_0$, $(t, x) \notin C$. Положим $f_\varepsilon = \partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon$, и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f_\varepsilon, & t \in (0, t_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ w|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

По теореме 65, решением этой задачи является функция

$$\tilde{v}_\varepsilon(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f_\varepsilon(s, y) dy ds.$$

Но функция $v_\varepsilon(t, x)$ тоже является решением той же задачи в силу того, как была определена функция f_ε . Отсюда, так как обе функции v_ε и \tilde{v}_ε ограничены, по теореме единственности получаем, что

$$v_\varepsilon(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f_\varepsilon(s, y) dy ds.$$

Так как $\xi(t, x) = 0$ при $t \leq t_0$, $(t, x) \notin C$, то $f_\varepsilon(t, x) = 0$ там же. Более того, так как $v_\varepsilon|_{C'} = u_\varepsilon|_{C'}$, то для всех $(t, x) \in C' \cap \Omega_{T, \varepsilon}$ имеем

$$f_\varepsilon(t, x) = \partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon = \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = 0$$

в силу свойств свертки и того, что $u(t, x)$ – решение уравнения теплопроводности. Следовательно,

$$u_\varepsilon(t, x) = \iint_C \Phi(t - s, x - y) f_\varepsilon(s, y) dy ds, \quad (3.61)$$

и этот интеграл не является несобственным. Расписывая подробно выражение для f_ε , получаем

$$u_\varepsilon(t, x) = \iint_C \Phi(t - s, x - y) ((\xi_s(s, y) - \Delta \xi(s, y)) u_\varepsilon(s, y) - 2 \langle \nabla \xi(s, y), \nabla u_\varepsilon(s, y) \rangle) dy ds.$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям (перебрасывая производные с u_ε), имеем

$$u_\varepsilon(t, x) = \iint_C (\Phi(t - s, x - y) (\xi_s(s, y) + \Delta \xi(s, y)) + 2 \langle \nabla_y \Phi(t - s, x - y), \nabla \xi(s, y) \rangle) u_\varepsilon(s, y) dy ds. \quad (3.62)$$

Устремляя в (3.62) $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, получаем

$$u(t, x) = \iint_C K(t, x, s, y) u(s, y) dy ds. \quad (3.63)$$

Так как $f_\varepsilon|_{C'} \rightarrow 0$, то $K(t, x, s, y) = 0$ при $(s, y) \in C'$. Осталось заметить, что $K \in C^\infty(C \setminus C')$. Следовательно, в силу (3.63) получаем $u \in C^\infty(C'')$. Теорема доказана.

Глава 7

Система уравнений Максвелла.

7.1 Постановка задачи. Законы сохранения для системы уравнений Максвелла.

Пусть $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, скалярная величина ρ – плотность электрического заряда, векторные величины: v – скорость движения зарядов, E – напряженность электрического поля, D – электрическая индукция, H – напряженность магнитного поля, B – магнитная индукция. Также обычно вводят векторную величину j – плотность электрического тока, задаваемую равенством $j = \rho v$. В указанных обозначениях можно записать в дифференциальной форме законы электродинамики.

Закон Гаусса (электрический заряд является источником электрической индукции):

$$\operatorname{div} D = \rho. \quad (1.1)$$

Закон Гаусса для магнитного поля (не существует магнитных зарядов):

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (1.2)$$

Закон индукции Фарадея (изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле):

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Закон Ампера-Максвелла (электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле):

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (1.4)$$

В среде сторонние электромагнитные поля вызывают поляризацию (электрическое поле) и намагниченность (ориентацию магнитных диполей вдоль силовых линий стороннего магнитного поля). Векторы поляризации P и намагниченности M связывают с E и H равенствами

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E, \quad M = \chi_\mu H,$$

где симметрические матрицы χ_e и χ_μ называются матрицами диэлектрической и магнитной восприимчивости соответственно. Кроме того, поляризация и намагниченность связаны с векторами электрической и магнитной индукции равенствами

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad B = \mu_0 (H + M).$$

В предположении, что среда изотропная и однородная, матрицы χ_e и χ_μ можно считать пропорциональными единичной матрице. Тогда скалярные параметры

$$\varepsilon = 1 + \chi_e, \quad \mu = 1 + \chi_\mu$$

называют относительной электрической проницаемостью и относительной магнитной проницаемостью соответственно. Тогда

$$\begin{cases} D = \varepsilon_0 \mu E, \\ B = \mu_0 \mu H \end{cases} \quad (1.5)$$

В предположении, что токи и заряды в точке x в момент времени t зависят только от величины поля в данной точке (отсутствует пространственная дисперсия) и только в этот момент времени (отсутствует временная дисперсия), уравнения (1.1) - (1.5) можно переписать в виде системы уравнений Максвелла для однородной и изотропной среды без дисперсии, которую мы и будем далее исследовать:

$$\begin{cases} \operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho, \\ \operatorname{div} B = 0, \\ \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} B = \mu \mu_0 j + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость света.

Начнем с того, что выпишем законы сохранения для системы (1.6).
Взяв дивергенцию от четвертого уравнения системы (1.6), получаем:

$$0 = \mu\mu_0 \operatorname{div} j + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} E),$$

откуда и из первого уравнения следует

$$\mu\mu_0 \operatorname{div} j + \frac{\mu}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0,$$

и после деления обеих частей на $\mu\mu_0$ получаем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho v) = 0. \quad (1.7)$$

Кроме уравнения неразрывности, для системы уравнений Максвелла имеет место закон сохранения энергии.

Теорема 73 (Закон сохранения энергии.) Пусть $S = E \times H$ – вектор плотности потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга), $w_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} |E|^2$ – объемная плотность энергии электрического поля, $w_H = \frac{1}{2\mu\mu_0} |B|^2$ – объемная плотность энергии магнитного поля. Тогда

$$\operatorname{div} S + \frac{\partial}{\partial t} (w_E + w_H) = - \langle E, j \rangle. \quad (1.8)$$

Доказательство. Скалярно умножая третье уравнение системы (1.6) на B , четвертое на E , получаем:

$$\begin{aligned} \langle B, \operatorname{rot} E \rangle &= -\frac{1}{2} \partial_t |B|^2, \\ \langle E, \operatorname{rot} B \rangle &= \mu\mu_0 \langle j, E \rangle + \frac{\varepsilon\mu}{2c^2} \partial_t |E|^2. \end{aligned}$$

Далее, так как $H = \frac{1}{\mu\mu_0} B$, то

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\mu\mu_0} E \times B, \\ \operatorname{div} S &= \frac{1}{\mu\mu_0} (\langle B, \operatorname{rot} E \rangle - \langle E, \operatorname{rot} B \rangle) = -\left(\frac{1}{2\mu\mu_0} \partial_t |B|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \langle j, E \rangle + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \partial_t |E|^2 \right), \end{aligned}$$

откуда следует (1.8). Теорема доказана.

7.2 Потенциалы. Калибровка Лоренца.

Введем скалярный потенциал $\phi(t, x)$ и векторный потенциал $A(t, x)$ так, что

$$E = -\nabla\phi - \partial_t A, \quad B = \text{rot}A. \quad (2.9)$$

Тогда второе уравнение системы Максвелла (1.6), очевидно, выполнено. Кроме того,

$$\text{rot}E = \text{rot}(-\nabla\phi - \partial_t A) = -\text{rot}(\nabla\phi) - \partial_t B,$$

и так как $\text{rot}(\nabla\phi) = 0$, то третье уравнение системы Максвелла также выполнено.

Заметим, что потенциалы A, ϕ определены с точностью до калибровочного преобразования: если $\psi(t, x) \in C^2$ – произвольная функция, то функции $A' = A + \nabla\psi, \phi' = \phi - \partial_t\psi$ также будут потенциалами для тех же E, B . Калибровочное преобразование можно применять для получения более простых уравнений на потенциалы. В частности, можно подобрать ψ таким образом, чтобы получить любое значение дивергенции векторного потенциала A . Действительно,

$$\text{div}A' = \text{div}A + \Delta\psi,$$

и, выбирая функцию ψ как решение уравнения Пуассона

$$\Delta\psi = \alpha(t, x)$$

мы можем получить любое значение дивергенции A' .

Подставляя равенства (2.9) в первое и четвертое уравнение системы Максвелла (1.6), получаем:

$$\text{div}(-\nabla\phi - \partial_t A) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho,$$

$$\text{rot}(\text{rot}A) = \mu\mu_0 j + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(-\nabla\phi - \partial_t A).$$

Используя равенство $\text{rot}(\text{rot}A) = -\Delta A + \nabla(\text{div}A)$, где оператор Лапласа в правой части применяется покомпонентно, получаем:

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \partial_t(\text{div}A) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho, \\ -\Delta A + \nabla(\text{div}A) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\text{div}(\partial_t\phi) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A = \mu\mu_0 j. \end{cases} \quad (2.10)$$

Используем калибровочное преобразование: перейдем к $A' = A + \nabla\psi$, $\phi' = \phi - \partial_t\psi$. Так как система уравнений (2.10) выполнена для A , ϕ , то она выполнена и для A' , ϕ' . Выберем теперь ψ так, что

$$\operatorname{div} A' + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \partial_t \phi' = 0, \quad (2.11)$$

т.е. функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \psi_{tt} - \Delta\psi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \partial_t \phi + \operatorname{div} A. \quad (2.12)$$

это условие называют условием калибровки Лоренца. Тогда система (2.10) на потенциалы A' , ϕ' примет вид

$$\begin{cases} -\Delta\phi' + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \phi'_{tt} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \varrho, \\ -\Delta A' + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} A'_{tt} = \mu\mu_0 j, \end{cases} \quad (2.13)$$

т.е. систему Максвелла (1.6) можно переписать в виде системы неоднородных волновых уравнений (2.13).

Пусть теперь $\Phi(t, x)$ – фундаментальное решение оператора Даламбера $\square_{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$, т.е.

$$-\Delta\Phi + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \Phi_{tt} = \delta(t, x).$$

Положим

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \Phi * \varrho, \\ A' &= \mu\mu_0 \Phi * j. \end{aligned}$$

Тогда функции ϕ' , A' удовлетворяют системе (2.13). Подставляя выражения для ϕ' , A' в условие (2.11), получаем:

$$\operatorname{div}(\mu\mu_0 \Phi * j) + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \partial_t \left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \Phi * \varrho \right) = 0,$$

откуда в силу свойств свертки

$$\Phi * (\operatorname{div}(\mu\mu_0 j) + \frac{\mu}{c^2 \varepsilon_0} \partial_t \varrho) = 0,$$

т.е. для плотности тока j и плотности распределения зарядов ϱ имеет место уравнение неразрывности (1.7).

7.3 Фундаментальное решение волнового уравнения. Запаздывающий потенциал.

В предыдущем разделе нам потребовалось фундаментальное решение для волнового уравнения – обобщенная функция $\Phi(t, x)$. Построим эту функцию для случая размерности $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Начнем со случая $n = 1$. Тогда для $\Phi(t, x)$ имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t, x) = \delta(t, x). \quad (3.14)$$

Сделав замену переменных $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x)$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + t)$, получаем:

$$\partial_\xi \partial_\eta \Phi = \delta(\xi, \eta). \quad (3.15)$$

Отсюда

$$\Phi = \theta(\xi)\theta(\eta) + F(\xi, \eta),$$

где $F(\xi, \eta)$ – гладкое решение уравнения $\partial_\xi \partial_\eta F = 0$. Считая $F = 0$, получаем:

$$\Phi(t, x) = \theta(t - x)\theta(x + t) = \theta(t - |x|).$$

Пусть теперь $n = 3$. Для построения фундаментального решения сделаем сначала вспомогательное вычисление. Пусть $u(t, x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ – классическое решение волнового уравнения при $t > 0$. Положим $[u]_+ = u(t, x)\theta(t)$, и заметим, что эта функция определена уже при всех $t \in \mathbb{R}$. Кроме того,

$$\partial_t [u]_+ = u_t \theta(t) + u(t, x)\delta(t) = u_t(t, x)\theta(t) + u|_{t=0}\delta(t),$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 [u]_+ &= u_{tt}(t, x)\theta(t) + u_t(t, x)\delta(t) + u|_{t=0}\delta'(t) = \\ &= u_{tt}(t, x)\theta(t) + u_t|_{t=0}\delta(t) + u|_{t=0}\delta'(t), \end{aligned}$$

а также

$$\Delta [u]_+ = \theta(t)\Delta u(t, x).$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\square [u]_+ = u_t|_{t=0}\delta(t) + u|_{t=0}\delta'(t). \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что искомое фундаментальное решение $\Phi(t, x)$ имеет вид $\Phi(t, x) = [u]_+$ для обобщенной функции $u(t, x)$ – решения задачи

$$\begin{cases} \square u = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = \delta(x). \end{cases} \quad (3.17)$$

Сопоставим задаче (3.17) вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \square u_\varepsilon = 0, & t > 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_\varepsilon|_{t=0} = 0, \\ \partial_t u_\varepsilon|_{t=0} = \psi_\varepsilon(x), \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\psi_\varepsilon(x)$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, сходящихся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда по формуле Кирхгофа (1.24) имеем

$$u_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \psi_\varepsilon(y) dS_y.$$

Так как $\psi_\varepsilon(x) \xrightarrow{D'} \delta(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, то по лемме 9 получаем, что решение задачи (3.17) имеет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \delta(y) dS_y = \frac{\delta(|x| - t)}{4\pi|x|}.$$

Так как $\delta(|x| - t) = 0$ при $t < 0$, то $[\delta(|x| - t)]_+ = \delta(|x| - t)$. Отсюда для $n = 3$ получаем

$$\Phi(t, x) = \frac{\delta(|x| - t)}{4\pi|x|}. \quad (3.19)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 74 (Единственность запаздывающего потенциала.) *Фундаментальное решение волнового уравнения, тождественно равное нулю при $t < 0$ – единственно.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть Φ_1 и Φ_2 – два фундаментальных решения, тождественно равных нулю при $t < 0$. Положим

$U = \Phi_1 - \Phi_2$. Тогда $\square U = 0$ и $U|_{t < 0} = 0$. Пусть $\eta_\varepsilon(t, x)$ – стандартное усредняющее ядро, $U_\varepsilon(t, x) = (U * \eta_\varepsilon)(t, x)$. Тогда в силу свойств свертки обобщенной и гладкой функций $\square U_\varepsilon = 0$ и $U_\varepsilon = 0$ при $t < -\varepsilon$. Но отсюда в силу единственности классического решения задачи Коши для волнового уравнения получаем, что $U_\varepsilon = 0$ при всех t . Но так как $U_\varepsilon(t, x) \xrightarrow{D'} U(t, x)$, $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, то $U(t, x) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, условие $\Phi(t, x) = 0$ при $t < 0$ выделяет из всех фундаментальных решений единственное решение, определенное при $n = 3$ формулой (3.19). Это решение называется запаздывающим потенциалом, и оно отвечает принципу причинности, согласно которому решение неоднородного волнового уравнения при $t = t_0$ зависит только от значений правой части при $t \leq t_0$, т.е. информацию нельзя передавать в прошлое. Так как этот принцип физически осмыслен, то в электродинамике для построения решений неоднородного волнового уравнения используется именно запаздывающий потенциал.

Заметим теперь, что равенство (3.16) имеет место и для $n = 2$. Отсюда аналогично сказанному выше для $n = 3$, в случае $n = 2$ получаем

$$\Phi(t, x) = \frac{\theta(t - |x|)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}. \quad (3.20)$$

Упражнение к пункту 3: Получить равенство (3.20) аналогично выводу равенства (3.16).

Литература:

М.Ф.Шубин, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §7, §23, §24

Глава 8

Введение в теорию полугрупп.

Многие уравнения с частными производными можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Этот, на первый взгляд достаточно абстрактный, подход позволяет получать результаты о существовании решений и их гладкости, не выводя явно формул для решений. Опишем сначала постановку задачи в общем виде. Пусть X – вещественное банахово пространство. Рассмотрим в этом пространстве обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = Av(t), \quad t \geq 0 \quad (0.1)$$

с начальным условием

$$v|_{t=0} = u \in X. \quad (0.2)$$

Здесь $A: D(A) \rightarrow X$ – линейный (возможно, неограниченный) оператор, $v: [0, +\infty) \rightarrow X$ – функция со значениями в банаховом пространстве X . Нас интересует, какие условия разумно наложить на оператор A для того, чтобы:

- а) задача (0.1), (0.2) имела единственное решение $v(t)$ для любого начального условия $u \in X$;
- б) интересные нам уравнения с частными производными можно было записать в виде (0.1), (0.2).

8.1 Полугруппа и ее инфинитезимальный оператор.

Пусть существует единственное решение $v: [0, +\infty) \rightarrow X$ задачи (0.1), (0.2) для любых начальных данных $u \in X$. Введем семейство линейных операторов $S(t): X \rightarrow X$ по правилу: $v(t) = S(t)u$. Тогда в силу того, что $v(t)$ – единственное решение, имеем:

$$S(0)u = u, \quad (1.3)$$

$$S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u. \quad (1.4)$$

Условие 3 Потребуем также, чтобы отображение $t: S(t)u$ было непрерывным из $[0, +\infty)$ в X .

Определение 7 Семейство $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ограниченных линейных операторов, отображающих X в X , называется полугруппой, если выполнены свойства (1.3), (1.4) и условие 3. Если, кроме того, для любого $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|S(t)\| \leq 1, \quad (1.5)$$

то полугруппу $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ будем называть сжимающей.

Пусть теперь задана сжимающая полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Зададимся вопросом о том, какой оператор A и какое уравнение (0.1) ей соответствуют.

Определение 8 Положим

$$D(A) = \{u \in X \mid \exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{S(t)u - u}{t} \in X\},$$

$A: D(A) \rightarrow X$, $Au = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{S(t)u - u}{t}$. Таким образом заданный оператор A назовем инфинитезимальным оператором полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ (в другой терминологии – производящим оператором или генератором).

Теорема 75 (Дифференциальные свойства полугруппы.) Пусть $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полугруппа, $u \in D(A)$. Тогда:

- а) $S(t)u \in D(A)$ для любого $t \geq 0$,
- б) $AS(t)u = S(t)Au$ для любого $t > 0$,
- в) отображение $t \rightarrow S(t)u$ дифференцируемо для любого $t > 0$,
- г) $\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u$ для любого $t > 0$.

Доказательство. Действительно, вычисляя явно $AS(t)u$, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0+0} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0+0} \frac{S(t)(S(s)u - u)}{s} = \\ &= S(t) \lim_{s \rightarrow 0+0} \frac{S(s)u - u}{s} = S(t)Au. \end{aligned}$$

Таким образом, $S(t)u \in D(A)$ и $AS(t)u = S(t)Au$, т.е. пункты а) и б) доказаны. Пусть теперь $t > 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0+0} \left(\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \left(S(t-h) \frac{S(h)u - u}{h} - S(t)Au \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \left(S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h) - S(t))Au \right) = 0, \end{aligned}$$

так как

$$\|S(t-h) \left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au \right)\| \leq \left\| \frac{S(h)u - u}{h} - Au \right\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0+0$$

в силу того, что полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ сжимающая и определения оператора A , и $\|(S(t-h) - S(t))Au\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0+0$ в силу того, что имеет место условие 3. Следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au. \quad (1.6)$$

Аналогично,

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t)Au. \quad (1.7)$$

Таким образом, существует производная $\frac{d}{dt}S(t)u = S(t)Au$. Отсюда и из пункта б) следуют пункты в), г). Теорема доказана.

Замечание 18 Определим по индукции $D(A^k) = \{u \in D(A^{k-1}) \mid A^{k-1}u \in D(A)\}$. Пусть $u \in D(A^m)$. Тогда для любого $t \geq 0$: $S(t)u \in D(A^m)$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Для $m = 1$ доказываемое утверждение совпадает с пунктом а) теоремы 75. Пусть доказываемое утверждение верно для некоторого $m = k$. Тогда для $m = k + 1$ имеем:

$$\lim_{s \rightarrow 0+0} \frac{S(s)S(t)A^k u - S(t)A^k u}{s} = S(t)A^{k+1}u,$$

т.е. $S(t)A^k u \in D(A)$. Но по пункту б) теоремы 75 имеем $S(t)Au = AS(t)u$, откуда следует, что $S(t)u \in D(A^{k+1})$. Замечание доказано.

Замечание 19 Так как отображение $t \rightarrow AS(t)u$ непрерывно, то отображение $t \rightarrow S(t)u$ принадлежит классу $C^1((0, +\infty))$, если $u \in D(A)$ и полу группа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ сжимающаяся.

Определение 9 Оператор $B: D(B) \rightarrow X$ называется замкнутым, если для любой последовательности $u_k \in D(B)$ такой, что $u_k \rightarrow u$ и $Bu_k \rightarrow v$ при $k \rightarrow \infty$ верно $u \in D(B)$, $v = Bu$.

Теорема 76 (Свойства генератора сжимающей полу группы). Пусть $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полу группа, A – ее производящий оператор. Тогда:

- а) $D(A)$ плотно в X ,
- б) оператор A замкнутый.

Доказательство. Докажем сначала пункт а). Пусть $u \in X$ – произвольный элемент. Положим $u^t = \int_0^t S(s)u ds$.

В силу условия 3 и интегральной теоремы о среднем имеет место сходимость $\frac{1}{t}u^t \rightarrow u$, $t \rightarrow 0+0$. Покажем, что для любого положительного t имеет место включение $u^t \in D(A)$. Действительно, для произвольного $h > 0$ имеем:

$$\frac{S(h)u^t - u^t}{h} = \frac{1}{h} \left(S(h) \left(\int_0^t S(s)u ds \right) - \int_0^t S(s)u ds \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^t (S(s+h) - S(s)) u ds.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{S(h)u^t - u^t}{h} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s) u ds - \frac{1}{h} \int_0^h S(s) u ds \right) = S(t)u - u. \end{aligned}$$

Отсюда по определению оператора A получаем, что для любого положительного t : $u^t \in D(A)$ и имеет место равенство

$$Au^t = A \int_0^t S(s) u ds = S(t)u - u. \quad (1.8)$$

Из вышесказанного следует пункт а). Докажем теперь пункт б). Пусть теперь $u_k \in D(A)$, $u_k \rightarrow u$, $Au_k \rightarrow v$ в X при $k \rightarrow \infty$. Тогда в силу пункта г) теоремы 75 имеем $\frac{d}{dt} S(t)u_k = AS(t)u_k$, откуда

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t AS(s)u_k ds = \int_0^t S(s)Au_k ds.$$

Устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)v ds,$$

и в силу интегральной теоремы о среднем и условия 3 получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)v ds = v,$$

т.е. $u \in D(A)$, $Au = v$. Теорема доказана.

8.2 Резольвенты.

Определение 10 Будем говорить, что $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A , если оператор $\lambda I - A: D(A) \rightarrow X$ взаимно однозначный и задает отображение „на“, т.е. обратим. Если $\lambda \in \rho(A)$, то резольвентой называется оператор $R_\lambda: X \rightarrow X$, определенный формулой $R_\lambda u = (\lambda I - A)^{-1}u$.

Можно показать, что $R_\lambda: X \rightarrow D(A)$ – ограниченный линейный оператор.

Упражнение. Доказать, что для любого $u \in D(A)$ имеет место равенство $AR_\lambda u = R_\lambda Au$.

Теорема 77 (Резольвентные тождества.) Если $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu, \quad (2.9)$$

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \quad (2.10)$$

Доказательство. Действительно, для любого $u \in X$ имеем

$$\begin{aligned} R_\lambda u &= R_\lambda(\mu I - A)R_\mu u = R_\lambda(\mu - \lambda)R_\mu u + R_\lambda(\lambda I - A)R_\mu u = \\ &= (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu u + R_\mu u, \end{aligned}$$

откуда следует равенство (2.9). Равенство (2.10), в свою очередь, сразу следует из (2.9):

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda} = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} = R_\mu R_\lambda.$$

Теорема доказана.

Теорема 78 (Резольвента как преобразование Лапласа полугруппы). Если $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полугруппа, A – ее производящий оператор, $\lambda > 0$, то $\lambda \in \rho(A)$ и имеет место равенство

$$R_\lambda u = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt. \quad (2.11)$$

Доказательство. Заметим, что в силу неравенств $\lambda > 0$, $\|S(t)\| \leq 1$ интеграл в правой части равенства (2.11) имеет смысл. Обозначим $\tilde{R}_\lambda u = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt$.

Тогда для любого элемента $u \in X$, для любого положительного h имеем

$$\begin{aligned} \frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (S(t+h) - S(t)) u dt = \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} S(t) u dt + \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) S(t) u dt = \\ &= -\frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t) u dt + \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u = A\tilde{R}_\lambda u.$$

Значит, $(\lambda I - A)\tilde{R}_\lambda u = u$, т.е. оператор \tilde{R}_λ — правый обратный для $\lambda I - A$. С другой стороны, для $u \in D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} A\tilde{R}_\lambda u &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) u dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} A S(t) u dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) A u dt = \tilde{R}_\lambda A u. \end{aligned}$$

При этом для обоснования перестановочности интеграла с оператором A необходимо перейти к интегральным суммам, а затем воспользоваться тем, что оператор A замкнут. Отсюда и из приведенных ранее выкладок следует, что

$$-u + \tilde{R}_\lambda \lambda u = \tilde{R}_\lambda A u,$$

т.е. \tilde{R}_λ — левый обратный для $\lambda I - A$. Таким образом, $\tilde{R}_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda$. Теорема доказана.

Упражнение. Провести подробное доказательство того, что в обозначениях теоремы 78 имеет место равенство

$$A\tilde{R}_\lambda u = \tilde{R}_\lambda Au.$$

8.3 Теорема Хилле-Иосиды.

Теорема 79 Пусть $A: D(A) \rightarrow X$ – замкнутый линейный оператор на X , $D(A)$ плотно в X . Тогда A – производящий оператор сжимающей полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ тогда и только тогда, когда

$$(0, +\infty) \subset \varrho(A), \quad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0. \quad (3.12)$$

Доказательство. Если A – производящий оператор, то по теореме 78 сразу получаем (3.12). Обратно, зафиксируем $\lambda > 0$ и определим

$$A_\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda.$$

Пусть $u \in D(A)$, тогда $\lambda R_\lambda u - u = A R_\lambda u = R_\lambda A u$, откуда и из (3.12) следует оценка

$$\|\lambda R_\lambda u - u\| = \|R_\lambda A u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|A u\| \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, $\lambda R_\lambda u \rightarrow u$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $u \in D(A)$. Далее, так как $D(A)$ плотно в X , $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$, то $\lambda R_\lambda u \rightarrow u$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $u \in X$. Значит, $A_\lambda u \rightarrow A u$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $u \in D(A)$. Тем самым, построенные нами операторы A_λ являются некоторой регуляризацией оператора A . Определим теперь

$$S_\lambda(t) = e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k.$$

Заметим, что семейство операторов $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$ – полугруппа. Кроме того, так как $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$, то

$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} \|R_\lambda^k\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1.$$

Следовательно, полугруппа $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающая. Нетрудно убедиться в том, что производящим оператором для этой полугруппы будет A_λ ,

$D(A_\lambda) = X$. Пусть теперь $\lambda, \mu > 0$. Так как по теореме 77 имеет место равенство $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, то $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$, откуда следует, что для любого $t > 0$ имеет место равенство $A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu$. Таким образом, если $u \in D(A)$, то

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u &= S_\mu(0)S_\lambda(t)u - S_\mu(t)S_\lambda(0)u = S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u \Big|_{s=0}^{s=t} = \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}(S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u)ds = \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u)ds. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| &\leq t \max_{s \in [0, t]} \|S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u)\| \leq \\ &\leq t \|A_\lambda u - A_\mu u\|, \end{aligned}$$

так как полугруппы $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$, $\{S_\mu(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающие. Из этого неравенства следует, что для любого $t \geq 0$, для любого $u \in D(A)$ существует предел

$$S(t)u = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda(t)u. \quad (3.13)$$

Более того, так как $\|S_\lambda\| \leq 1$, то предел (3.13) существует для любого $u \in X$ равномерно по t на компактных подмножествах $[0, +\infty)$. Кроме того, нетрудно убедиться в том, что $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полугруппа. Докажем теперь, что A – ее производящий оператор. Обозначим B – производящий оператор $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. В силу пункта г) теоремы 75 имеем

$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u ds. \quad (3.14)$$

Заметим, что для любого $u \in D(A)$ имеет место неравенство

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\| \leq \|S_\lambda(s)\| \cdot \|A_\lambda u - Au\| + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au\|,$$

и в этом неравенстве правая часть стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$. Переходя с помощью этой оценки в равенстве (3.14) к пределу при $\lambda \rightarrow +\infty$, получаем

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)Auds. \quad (3.15)$$

Отсюда сразу следует, что $D(A) \subseteq D(B)$ и для любого $u \in D(A)$ имеет место равенство

$$Bu = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{S(t)u - u}{t} = Au.$$

Далее, если $\lambda > 0$, то $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Кроме того, так как $\lambda \in \rho(A)$, то

$$(\lambda I - B)(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A)) = X.$$

Поэтому $(\lambda I - B)|_{D(A)}$ – взаимно однозначное отображение „на“. Следовательно, $D(A) = D(B)$, а значит, $A = B$, т.е. A – производящий оператор сжимающей полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, что и требовалось доказать.

Упражнения. 1. Доказать, что в обозначениях теоремы Хилле-Иосиды оператор A_λ является производящим для полугруппы $\{S_\lambda(t)\}_{t \geq 0}$.

2. Доказать, что семейство операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, определенных как предел (3.13), является сжимающей полугруппой.

8.4 Приложение теории полугрупп к параболическим уравнениям.

Определение 11 Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$. Полугруппу $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ будем называть γ -сжимающей, если для любого $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|S(t)\| \leq e^{\gamma t}.$$

Замечание 20 Можно доказать вариант теоремы Хилле-Иосиды в следующем виде: замкнутый оператор A с плотной областью определения – производящий оператор для γ -сжимающей полугруппы тогда и только тогда, когда

$$(\gamma, +\infty) \subset \rho(A), \quad \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \quad \forall \lambda > \gamma. \quad (4.16)$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $T > 0$, Ω_T – параболический цилиндр. Рассмотрим смешанную задачу для параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0, & (t, x) \in \Omega_T, \\ u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = g(x), \end{cases} \quad (4.17)$$

где оператор L имеет вид

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u$$

и удовлетворяет в Ω условию равномерной эллиптичности с константой $\theta > 0$, т.е. для любого $x \in \Omega$, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

Положим $X = L_2(\Omega)$, $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $Au = -Lu$. Тогда имеет место следующая теорема

Теорема 80 *Оператор A является производящим оператором γ -сжимающей полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ на $L_2(\Omega)$ для некоторого $\gamma \geq 0$.*

Литература:

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §7.4

Глава 9

Курсовые работы второго семестра(калибровка Лоренца).

В качестве примера, построим решения задачи Коши для системы Максвелла:

ПРИМЕР 1. Поле скоростей и начальное распределение электрических зарядов $v = (0, x_2, 0)$, $\varrho^0(x) = e^{-|x|^2}$.

1а) Калибровка Лоренца

$$\partial_t \varrho + x_2 \partial_{x_2} \varrho + \varrho = 0$$

Решение- $\varrho = e^{-t} r$, где

$$\partial_t r + x_2 \partial_{x_2} r = 0$$

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad \dot{x}_3 = 0,$$

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 e^t, \quad x_3 = \xi_3,$$

Отсюда

$$r(x_2, t) = e^{-x_2^2 e^{-2t}} \implies \varrho(x, t) = e^{-x_2^2 e^{-2t} - t}$$

Через векторный и скалярный потенциалы решение системы Максвелла

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \mathbf{A}$$

При выполнении калибровки Лоренца

$$\text{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \partial_t \varphi$$

получим систему волновых уравнений для потенциалов

$$\partial_t^2 \mathbf{A} - c^2 \Delta \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

$$\partial_t^2 \varphi - c^2 \Delta \varphi = \frac{c^2 \varrho}{\varepsilon_0}$$

Эти уравнения совместно с калибровкой Лоренца равносильны системе Максвелла. Условие же калибровки выполняется тогда и только тогда, когда

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}$$

ϱ – плотность электрического заряда, \mathbf{j} – плотность электрического тока. Таким образом, условие калибровки выполняется тогда и только тогда, когда

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0$$

Тогда

$$\partial_t^2 A_1 - c^2 \Delta A_1 = 0, \quad \partial_t^2 A_3 - c^2 \Delta A_3 = 0$$

$$\partial_t^2 A_2 - c^2 \Delta A_2 = \frac{x_2 \varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\partial_t^2 \varphi - c^2 \Delta \varphi = \frac{c^2 \varrho}{\varepsilon_0}$$

Для $\varphi(t, x) = \varphi(t, x_2)$

$$\partial_t^2 \varphi - c^2 \partial_{x_2}^2 \varphi = \frac{c^2}{\varepsilon_0} e^{-x_2^2} e^{-2t-t},$$

Из формулы Даламбера, для $\tau = ct$,

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, x_2) &= \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{1}{c}(\tau-s)} \int_{x-\tau+s}^{x+\tau-s} e^{-y^2} e^{-\frac{2}{c}(\tau-s)} dy ds = \\ &= -\frac{c^2}{\varepsilon_0} \left(\int_0^\tau s \left(1 + \frac{1}{c}(\tau-s)\right) e^{\frac{1}{c}(\tau-s)} [e^{-(x+\tau-s)^2} e^{\frac{2}{c}(\tau-s)} + e^{-(x-\tau+s)^2} e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{c} \int_0^\tau s e^{\frac{1}{c}(\tau-s)} [e^{-(x+\tau-s)^2} e^{\frac{2}{c}(\tau-s)} - e^{-(x-\tau+s)^2} e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}] ds \right) \\ A_2(\tau, x_2) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{1}{c}(\tau-s)} \int_{x_2-\tau+s}^{x_2+\tau-s} y e^{-y^2} e^{-\frac{2}{c}(\tau-s)} dy ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{\frac{1}{c}(\tau-s)} \int_{(x_2-\tau+s)e^{\frac{1}{c}(\tau-s)}}^{(x_2+\tau-s)e^{\frac{1}{c}(\tau-s)}} z e^{-z^2} dz ds = \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{\frac{1}{c}(\tau-s)} \int_{(x_2-\tau+s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}}^{(x_2+\tau-s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}} e^{-q} dq ds = \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{\frac{1}{c}(\tau-s)} \left(e^{-(x_2-\tau+s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}} - e^{-(x_2+\tau-s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}} \right) ds = \\
&= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{\frac{1}{c}\xi - (x_2^2 + \xi^2) e^{\frac{2}{c}\xi}} \left(e^{2x_2\xi e^{\frac{2}{c}\xi}} - e^{-2x_2\xi e^{\frac{2}{c}\xi}} \right) d\xi
\end{aligned}$$

2б) Теперь проверим начальные условия калибровки Лоренца

$$\partial_{x_1} A_1^0 + \partial_{x_3} A_3^0 = -\partial_{x_2} A_2|_{t=0} - \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi|_{t=0} = 0$$

$$\partial_t A_j = -\frac{1}{c^2} \partial_{x_j} \varphi|_{t=0} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

Достаточно взять $A_j \equiv 0$, $j = 1, 3$ Тогда

$$\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E}_j = 0, \quad j = 1, 3,$$

$$\mathbf{E}_2 = -\partial_{x_2} \varphi - \partial_t A_2$$

ПРИМЕР 2. Поле скоростей и начальное распределение электрических зарядов $v = (x_1, x_2, x_3)$, $\varrho^0(x) = e^{-|x|^2}$.

2а) Решение калибровки Лоренца

$$\varrho(x_1, x_2, t) = e^{-3t - r^2 e^{2t}}, \quad r^2 = |x|^2$$

Волновое уравнение в полярных координатах

$$\partial_t^2 \varphi - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi) = \frac{c^2}{\varepsilon_0} e^{-3t - r^2 e^{2t}}$$

Положим $z = r \varphi$, $\tau = ct$. Тогда

$$\partial_\tau^2 z - \partial_r^2 z = \frac{1}{\varepsilon_0} r e^{-\frac{3}{c}\tau - r^2 e^{\frac{2}{c}\tau}}, \quad r > 0, t > 0,$$

$$z|_{r=0} = 0$$

Теперь рассмотрим нечетное продолжение $Z(r, t) = z(r, t)$, $r \geq 0, t \geq 0$ и $Z(r, t) = -z(-r, t)$, $r < 0, t \geq 0$. Тогда $\partial_t^2 Z = -\partial_t^2 z$, $r < 0, t \geq 0$ и $\partial_r^2 Z = -\partial_r^2 z$, $r < 0, t \geq 0$. Отсюда

$$\partial_\tau^2 Z - \partial_r^2 Z = \frac{1}{\varepsilon_0} r e^{-\frac{3}{c}\tau - r^2 e^{\frac{2}{c}\tau}}, \quad t > 0, r \in R.$$

Решение

$$\begin{aligned} Z(r, \tau) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{3}{c}(\tau-s)} \int_{r-\tau+s}^{r+\tau-s} y e^{-y^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}} dy ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{5}{c}(\tau-s)} \int_{(r-\tau+s)e^{\frac{1}{c}(\tau-s)}}^{(r+\tau-s)e^{\frac{1}{c}(\tau-s)}} Y e^{-Y^2} dY ds = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{5}{c}(\tau-s)} \int_{(r-\tau+s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}}^{(r+\tau-s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}} e^{-Z} dZ ds = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{5}{c}(\tau-s)} [e^{-(r-\tau+s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}} - e^{-(r+\tau-s)^2 e^{\frac{2}{c}(\tau-s)}}] ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^\tau e^{-\frac{5}{c}q - (r^2 + q^2) e^{\frac{2}{c}q}} \operatorname{sh}(2rq e^{\frac{2}{c}q}) dq \end{aligned}$$

где $Z = Y^2, q = \tau - s$

$$\partial_t^2 A_j - c^2 \Delta A_j = \frac{x_j}{\varepsilon_0} e^{-3t - r^2 e^{2t}}$$

Если $A_j = x_j a(r, t)$, то

$$\partial_t^2 a - c^2 \partial_r^2 a - 4c^2 \frac{1}{r} \partial_r a = \frac{1}{\varepsilon_0} e^{-3t - r^2 e^{2t}} \quad (0.1)$$

Положим $A = r^2 a$. Тогда смешанная задача

$$\begin{aligned} \partial_t^2 A - c^2 \partial_r^2 A + \frac{2}{r^2} A &= \frac{r^2}{\varepsilon_0} e^{-3t - r^2 e^{2t}} \\ A|_{r=0} = 0, \quad A|_{t=0} = \partial_t A|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (0.2)$$

ПОСКОЛЬКУ

$$\partial_r^2 (r^2 a) - 2a = \partial_r (2ra + r^2 \partial_r a) = r^2 \partial_r^2 a + 4r \partial_r a$$

ЗАДАЧА. Доказать существование классического решения смешанной задачи (0.2)

Приведем наводящие соображения. Делаем нечетное продолжение

$$Z = A, \quad r \geq 0, t > 0, \quad Z = -A(-r, t), \quad r < 0, t > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} \partial_t^2 Z - c^2 \partial_r^2 Z + \frac{2}{r^2} Z &= - \left(\partial_t^2 A(-r, t) - c^2 \partial_r^2 A(-r, t) + \frac{2}{r^2} A(-r, t) \right) = \\ &= - \frac{r^2}{\varepsilon_0} e^{-3t - r^2 e^{2t}} \end{aligned}$$

Положим $F = r^2 e^{-3t - r^2 e^{2t}}$, $r \geq 0, t > 0$, и $F = -r^2 e^{-3t - r^2 e^{2t}}$, $r < 0, t > 0$.

$$\partial_t^2 Z - c^2 \partial_r^2 Z + \frac{2}{r^2} Z = \frac{1}{\varepsilon_0} F$$

$$Z|_{t=0} = \partial_t Z|_{t=0} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\|\partial_t Z\|^2 + c^2 \|\partial_r Z\|^2 + 4 \left\| \frac{1}{r} Z \right\|^2 - \frac{2}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} F Z dr \right) = 0$$

Интегрируя, получим

$$\|\partial_t Z\|^2(t) + c^2 \|\partial_r Z\|^2(t) + 4 \left\| \frac{1}{r} Z \right\|^2(t) = \frac{2}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} F(r, t) Z(r, t) dr$$

Отсюда априорная оценка:

$$\|\partial_t Z\|^2(t) + c^2 \|\partial_r Z\|^2(t) + 2 \left\| \frac{1}{r} Z \right\|^2(t) \leq \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \|r F(r, t)\|^2(t)$$

2б) Перейдем к исследованию решения системы Максвелла. В этом случае магнитное поле

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} A_3 - \partial_{x_3} A_2 \\ -\partial_{x_1} A_3 + \partial_{x_3} A_1 \\ \partial_{x_1} A_2 - \partial_{x_2} A_1 \end{pmatrix} = 0$$

где $A_j = x_j \frac{A(r, t)}{r^2}$ и

$$\partial_{x_2} A_3 - \partial_{x_3} A_2 = x_2 x_3 \left(\partial_r \left(\frac{A(r, t)}{r^2} \right) - \partial_r \left(\frac{A(r, t)}{r^2} \right) \right) = 0$$

Электрическое поле

$$\mathbf{E}_j = -x_j \left(\partial_r \left(\frac{z}{r} \right) + \frac{\partial_t A}{r^2} \right), \quad j = 1, 2, 3$$

ПРИМЕР 3. Поле скоростей и начальное распределение электрических зарядов

$$v = (x_2, -x_1, 0), \quad \varrho^0(x) = e^{-r^2}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + r_3^2$$

За) Решение

$$\begin{aligned} \varrho(x, t) &= e^{-r^2} \\ \partial_t^2 \varphi - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi) &= \frac{c^2}{\varepsilon_0} e^{-r^2} \end{aligned}$$

Для $z = r\varphi$ имеем смешанную задачу

$$\partial_t^2 z - 2\partial_r^2 z = \frac{c^2}{\varepsilon_0} r e^{-r^2}$$

$$z|_{r=0} = 0, \quad z|_{t=0} = \partial_t z|_{t=0} = 0$$

Векторный потенциал удовлетворяют системе

$$\partial_t^2 A_1 - c^2 \Delta A_1 = \frac{x_2}{\varepsilon_0} e^{-r^2}$$

$$\partial_t^2 A_2 - c^2 \Delta A_2 = -\frac{x_1}{\varepsilon_0} e^{-r^2}$$

$$\partial_t^2 A_3 - c^2 \Delta A_3 = 0$$

Решение будем искать в виде

$$A_1 = x_2 a(r, t), \quad A_2 = -x_1 a(r, t)$$

Тогда

$$\partial_t^2 a - c^2 \partial_r^2 a - 4c^2 \frac{1}{r} \partial_r a = \frac{1}{\varepsilon_0} e^{-r^2}$$

т.е. мы получили опять уравнение (0.1) с другой правой частью. Также как выше сделаем замену $A = r^2 a$

$$\partial_t^2 A - c^2 \partial_r^2 A + c^2 \frac{2}{r^2} A = \frac{r^2}{\varepsilon_0} e^{-r^2}$$

$$A|_{r=0} = 0, \quad A|_{t=0} = \partial_t A|_{t=0} = 0$$

перейдем к смешанной задаче типа (0.2). Делаем нечетное продолжение $Z = A, r \geq 0, t > 0$, и $Z = -A(-r, t), r < 0, t > 0$, Тогда

$$\partial_t^2 Z - c^2 \partial_r^2 Z + c^2 \frac{2}{r^2} Z = \frac{1}{\varepsilon_0} F, \quad r \in R, t > 0,$$

$$Z|_{t=0} = \partial_t Z|_{t=0} = 0$$

$F = r^2 e^{-r^2}, r \geq 0, t > 0$, и $F = -r^2 e^{-r^2}, r < 0, t > 0$. Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\|\partial_t Z\|^2 + c^2 \|\partial_r Z\|^2 + 4c^2 \left\| \frac{1}{r} Z \right\|^2 - 2 \int_0^\infty \frac{r^2}{\varepsilon_0} e^{-r^2} w dr \right) = 0$$

Априорная оценка

$$\|\partial_r Z\|^2(t) + \|\partial_t Z\|^2(t) + 2 \left\| \frac{1}{r} Z \right\|^2(t) \leq \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \|rF\|^2$$

В этом случае магнитное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\partial_{x_3} A_2 \\ \partial_{x_3} A_1 \\ \partial_{x_1} A_2 - \partial_{x_2} A_1 \end{pmatrix} = \\ &= -2A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \partial_r \left(\frac{A}{r^2} \right) \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\partial_r \left(\frac{z}{r} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial_t A}{r^2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Глава 10

Дополнительные главы.

10.1 Дифференцируемость решения ОДУ по параметру и ее применение.

10.1.1 Непрерывность решения ОДУ по параметру.

Теорема 81 Пусть решение $x = \phi(t)$ задачи $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ существует на интервале $I = [t_*, t_1] \ni t_0$, и в окрестности $V = \{t \in I, |x - \phi(t)| < \rho\}$ его графика вектор-функция $f(t, x)$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любой другой задачи $\dot{y} = g(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ в которой g и $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ непрерывны и $|g - f| < \delta$ в V , $|y_0 - x_0| < \delta$, решение $y(t)$ может быть продолжено на I и $|y(t) - \phi(t)| < \varepsilon$ на I .

Доказательство. V – замкнутое ограниченное множество; f и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны на V . Значит, найдутся константы m, l такие, что $|f(t, x)| \leq m$, $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}| \leq l$. Тогда если $(t, x) \in V$, $(t, y) \in V$, то

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot (x_j - y_j) \right| \leq nl|x - y|.$$

Отсюда, т.к. $|f(t, y) - g(t, y)| \leq \delta$, то для $x = \phi(t)$ и $y(t)$ на отрезке $I_1 \subseteq I$, пока график $y(t)$ проходит в V , имеем

$$|\dot{x} - \dot{y}| = |f(t, x) - g(t, y)| \leq nl|x - y| + \delta.$$

Пусть $z(t) = \phi(t) - y(t)$. Тогда $|z(t_0)| \leq \delta$, $|\dot{z}| \leq nl|z| + \delta$ на I_1 . Отсюда

$$\begin{aligned} |\phi(t) - y(t)| = |z(t)| &\leq \delta e^{nls} + \frac{\delta}{nl}(e^{nls} - 1), \\ s = \max\{t_1 - t_0, t_1 - t_*\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \min\{\varrho, \varepsilon\}$, и выберем $\delta > 0$ так, чтобы правая часть (1.1) была меньше ε_1 . Тогда решение $y(t)$, т.ч. $|y_0 - x_0| \leq \delta$ проходит внутри трубки $T = \{t \in I_1, |x - \phi(t)| \leq \varepsilon_1\}$, $T \subseteq V$. По теореме о продолжении, решение $y(t)$ может быть продолжено до выхода на границу трубки T . Если бы оно вышло на боковую границу трубки, то нашлось бы такое $\tau \in I_1$, что $|y(\tau) - \phi(\tau)| = \varepsilon_1$, что противоречит выбору δ . Таким образом, решение $y(t)$ выходит из трубки T только на ее концах, а значит, оно может быть продолжено на трубку $T_* = \{t \in I, |x - \phi(t)| \leq \varepsilon_1\}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь задачу с параметром $\mu \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = a(\mu). \quad (1.2)$$

Если $f, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны по t, x , то $\forall \mu \in M$ существует решение $x = \phi(t, \mu)$ задачи (1.2).

Теорема 82 Пусть при $\mu = \mu_0$ существует решение (1.2) на $I = [t_*, t_1]$, и в окрестности $V = \{t \in I, |x - \phi(t, \mu_0)| \leq \varrho\}$ его графика при $\mu \in M$ вектор-функция $f(t, x, \mu)$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны по t, x, μ , функция $a(\mu)$ непрерывна по μ . Тогда найдется $\eta > 0$ такое, что функция $\phi(t, \mu)$ непрерывна по t, μ при $t \in I, |\mu - \mu_0| < \eta$.

Доказательство. А) Непрерывность по μ . При фиксированном $\mu = \mu_0$ задача (1.2) удовлетворяет условиям теоремы 81. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)| \leq \delta$ для $(t, x) \in V, |a(\mu) - a(\mu_0)| \leq \delta$, то решение $\phi(t, \mu)$ существует при $t \in I$ и $|\phi(t, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$. Пусть M_0 – замкнутая окрестность μ_0 , $M_0 \subseteq M$. Так как $f(t, x, \mu)$ и $a(\mu)$ непрерывны при $(t, x) \in V, \mu \in M_0$, то они равномерно непрерывны. Отсюда найдется $\eta > 0$ такое, что при $|\mu - \mu_0| < \eta$ имеем $\mu \in M_0$ и из равномерной непрерывности $|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)| \leq \delta, |a(\mu) - a(\mu_0)| \leq \delta$. Отсюда по теореме 81 функция $\phi(t, \mu)$ определена на интервале I и удовлетворяет неравенству $|\phi(t, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$, что и означает непрерывность по μ в точке $\mu = \mu_0$.

Б) Непрерывность по x при $\mu = \mu_0$. При $(t, x) \in V, |\mu - \mu_0| \leq \eta$ функция

f непрерывна. Следовательно, она ограничена на указанном множестве, т.е. найдется q такое, что $|f| < q$. Отсюда $|\frac{\partial \phi}{\partial t}| = |f| \leq q$ и $\forall t, \tau \in I$ при $|t - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{q}$ имеем $|\phi(t, \mu) - \phi(\tau, \mu)| \leq q|\tau - t| \leq \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $|\phi(t, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$ при $|\mu - \mu_0| \leq \eta$, $|t - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{q}$ следует $|\phi(\tau, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < 2\varepsilon$. Следовательно, решение $\phi(t, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных при $\mu = \mu_0$, $t \in I$.

В) Распространение на $\mu \neq \mu_0$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varrho)$. Тогда найдется $\eta_1 \in (0, \eta)$ такое, что при любом μ_1 , удовлетворяющем неравенству $|\mu_1 - \mu_0| \leq \eta_1$ по доказанному, решение $\phi(t, \mu_1)$ определено на I и удовлетворяет неравенству $|\phi(t, \mu_1) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$. Тогда его окрестность $V_1 = \{t \in I, |x - \phi(t, \mu_1)| \leq \varrho - \varepsilon\}$ содержится в V . Значит, в окрестности V_1 выполнены условия пунктов А,Б доказательства с μ_1 вместо μ_0 . Таким образом, решение $\phi(t, \mu)$ непрерывно по t, μ при $\mu = \mu_1$. Теорема доказана.

10.1.2 Дифференцируемость решения по параметру.

Обозначим D – область в \mathbb{R}^{n+1} , M – интервал в \mathbb{R} .

Теорема 83 Пусть при $(t, x) \in D$, $\mu \in M$ все функции f , $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$, $a'(\mu)$ непрерывны. Пусть также для любого $\mu \in M$ на $[t_1, t_2] \ni t_0$ решение задачи (1.2) существует, и его график проходит в области D . Тогда это решение имеет производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}$, непрерывные по t, μ . Функции $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \quad u_i(t_0) = a'_i(\mu) \quad (1.3)$$

Доказательство. Зафиксируем $\mu \in M$. По определению производной,

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \lim_{\tilde{\mu} \rightarrow \mu} \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu},$$

где $\tilde{x} = x(t, \tilde{\mu})$. Обозначим $v(t, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu}$. Идея доказательства теоремы заключается в том, чтобы составить дифференциальное уравнение для $v(t, \tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} \neq \mu$ и воспользоваться теоремой о непрерывности по параметру. Реализуем эту идею:

$$\frac{dv(t, \tilde{\mu})}{dt} = \frac{f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}) - f(t, x, \mu)}{\tilde{\mu} - \mu}, \quad v(t_0, \mu) = \frac{a(\tilde{\mu}) - a(\mu)}{\tilde{\mu} - \mu}.$$

Положим $F(s) = f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))$. Тогда $f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}) - f(t, x, \mu) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds$, $F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\tilde{\mu} - \mu)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 F'(s) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))}{\partial(x + s(\tilde{x} - x))} ds \cdot \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu} + \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\partial f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))}{\partial(\mu + s(\tilde{\mu} - \mu))} ds. \end{aligned}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ непрерывны по совокупности переменных, то подынтегральные функции непрерывны по $t, x, \tilde{x}, \mu, \tilde{\mu}, s$, а интегралы – по $t, x, \tilde{x}, \mu, \tilde{\mu}$. Кроме того, по теореме 82 функция \tilde{x} непрерывна по $t, \tilde{\mu}$. Следовательно, последние два интеграла – непрерывные функции от $t, \tilde{\mu}$, в том числе, в точке $\tilde{\mu} = \mu$. Обозначая $H(t, \tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))}{\partial(x + s(\tilde{x} - x))} ds$, $h(t, \tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))}{\partial(\mu + s(\tilde{\mu} - \mu))} ds$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = H(t, \tilde{\mu})v + h(t, \tilde{\mu}). \quad (1.4)$$

Доопределим $v(t, \tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} = \mu$ как решение (1.4) с начальным условием $v(t_0, \mu) = a'(\mu)$. По теореме 82 функция $v(t, \tilde{\mu})$ непрерывна по $\tilde{\mu}$, включая $\tilde{\mu} = \mu$. При $\tilde{\mu} = \mu$ подынтегральные выражения в формулах для $H(t, \tilde{\mu})$ и $h(t, \tilde{\mu})$ не зависят от s и равны $H(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $h(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}$. Таким образом, для функции $v(t, \mu)$ уравнение и начальное условие совпадают с (1.3).

Пусть теперь μ меняется на интервале M . Тогда правые части системы (1.3) и частные производные по u_j от них непрерывны по t, μ . По теореме 82 решение системы (1.3) будет также непрерывно по t, μ .

Теорема доказана.

Следствие 12 Пусть выполнены условия теоремы 83 и, кроме того, функции f_i , $a_i(\mu)$ имеют непрерывные производные по x, μ до порядка $t \geq 2$ включительно, в том числе смешанные производные. Тогда решение $x(t, \mu)$ имеет непрерывные по t, μ производные по μ до порядка t включительно.

Следствие 13 Пусть выполнены условия предыдущего следствия, и пусть $(t, x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$ и при $\mu = 0$, $t \in [t_1, t_2]$ график решения задачи

(1.2) проходит в D , $t_0 \in [t_1, t_2]$. Тогда решение $x(t, \mu)$ задачи (1.2) при $t \in [t_1, t_2]$ разлагается по формуле Тейлора по степеням параметра μ вплоть до μ^m :

$$x(t, \mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \dots + \mu^m v_m(t) + \bar{o}(\mu^m).$$

10.1.3 Примеры и упражнения.

А. Найти $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$, если

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 4t\mu + \mu^2, \quad x(1) = 2\mu - 1.$$

Решение. По теореме 83 для функции $u = \frac{\partial x}{\partial \mu}$ имеем:

$$\frac{du}{dt} = 2xu + 4t + 2\mu, \quad u(1) = 2.$$

При этом $\mu = 0$, x — решение уравнения $\dot{x} = x^2$ с начальным условием $x(1) = -1$, т.е. $x(t) = -\frac{1}{t}$. Отсюда

$$\frac{du}{dt} = -2\frac{u}{t} + 4t, \quad u(1) = 2.$$

Решая это линейное уравнение, получаем $u = t^2 + Ct^{-2}$, и из начального условия $C = 1$, откуда $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = t^2 + t^{-2}$.

Ответ: $t^2 + t^{-2}$.

Б. Найти разложение решения задачи $\dot{x} = \frac{t}{x} - 2\mu t^2$, $x(1) = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8}$ по степеням μ вплоть до μ^2 .

Решение. Возьмем $D = \{t > 0, x > 0\}$. В этой области выполняются условия следствия 1.2 для любого μ . Положим

$$x(t, \mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \bar{o}(\mu^2).$$

Подставляя это равенство в уравнение, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 + \mu \dot{v}_1 + \mu^2 \dot{v}_2 + \bar{o}(\mu^2) &= \frac{t}{v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \bar{o}(\mu^2)} - 2\mu t^2, \\ v_0(1) + \mu v_1(1) + \mu^2 v_2(1) &= 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Найдем v_0 , для этого подставим $\mu = 0$ в равенство (1.5):

$$\dot{v}_0 = \frac{t}{v_0}, \quad v_0(1) = 1,$$

откуда $v_0(t) = t$. Найдем v_1 , для этого продифференцируем (1.5) по μ и подставим $\mu = 0$:

$$\dot{v}_1 = -\frac{tv_1}{v_0^2} - 2t^2, \quad v_1(1) = -\frac{1}{2},$$

откуда $v_1(t) = -\frac{1}{2}t^3$. Аналогично для v_2 получаем

$$2\dot{v}_2 = t \left(-\frac{v_1 + 2\mu v_2 + \bar{o}(\mu)}{(v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \bar{o}(\mu^2))^2} \right)'_{\mu=0},$$

$$2\dot{v}_2 = -t \frac{2v_2 v_0^2 - 2v_0 v_1^2}{v_0^4}, \quad v_2(1) = \frac{1}{8}.$$

Отсюда $v_2(t) = \frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}$.

Ответ:

$$x(t, \mu) = t - \frac{\mu}{2}t^3 + \mu^2 \left(\frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24} \right) + \bar{o}(\mu^2).$$

- Упражнения. 1. Обосновать переход к неравенству (1.1) в теореме 81.
 2. Доказать следствие 1.1. Указание: применить метод математической индукции по m .
 3. Проверить выкладки при решении ОДУ в примерах А, Б.
 4. Обосновать возможность нахождения уравнений для v_j в примере Б путем дифференцирования равенства (1.5) по μ и подстановки $\mu = 0$.

Литература:

А.Ф. Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §7, §23, §24

10.2 Метод стационарной фазы.

В этом разделе мы исследуем поведение быстро осциллирующих решений волнового уравнения, которые концентрируются около некоторых характеристических поверхностей. Начнем с некоторых формальных, но показательных вычислений.

10.2.1 Геометрическая оптика.

ПРИМЕР 1(осциллирующее решение). Рассмотрим комплексно-значное решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0, \quad x \in R^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= g(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следуя П. Лаксу, зафиксируем ε и будем искать решение $u = u^\varepsilon$ уравнения (2.6) в виде

$$u^\varepsilon(x, t) = a^\varepsilon(x, t) e^{i\frac{1}{\varepsilon}\varphi^\varepsilon(x, t)}, \quad (2.7)$$

где вещественная функция φ^ε интерпретируется как **фаза**, а вещественно-значная функция $a^\varepsilon(x, t)$ —как **амплитуда**. Предложенная форма решения называется анзацем геометрической оптики. Идея заключается в том, что быстро осциллирующие решения волнового уравнения можно исследовать с помощью уравнения с частными производными относительно фазовой функции в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Приведем формальные рассуждения. Подставляя (2.7) в (2.6) и вычисляя, находим

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = \\ &= e^{i\frac{1}{\varepsilon}\varphi^\varepsilon(x, t)} \left(\frac{i\partial_t^2 \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} a^\varepsilon - \left(\frac{\partial_t \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 a^\varepsilon + 2 \frac{i\partial_t a^\varepsilon \partial_t \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} + \partial_t^2 a^\varepsilon \right) - \\ &- e^{i\frac{1}{\varepsilon}\varphi^\varepsilon(x, t)} \left(\frac{i\Delta \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} a^\varepsilon - \left(\frac{\partial_x \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 a^\varepsilon + 2 \frac{i\partial_x a^\varepsilon \partial_x \varphi^\varepsilon}{\varepsilon} + \Delta a^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

Сокращая на $e^{i\frac{1}{\varepsilon}\varphi^\varepsilon(x, t)}$ и взяв вещественную часть, получим

$$a^\varepsilon \left((\partial_t \varphi^\varepsilon)^2 - (\partial_x \varphi^\varepsilon)^2 \right) = \varepsilon^2 (\partial_t^2 a^\varepsilon - \Delta a^\varepsilon)$$

Если в некотором смысле

$$\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi, \quad a^\varepsilon \rightarrow a \neq 0, \quad (2.8)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, то отсюда, по видимому, можно вывести, что

$$\partial_t \varphi \pm |\partial_x \varphi| = 0, \quad x \in R^n, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

Неформально можно считать характеристические прямые этих уравнений Гамильтона-Якоби лучами, вдоль которых решение (2.7) **концентрируется** при $\varepsilon \rightarrow 0$ (высокочастотный предел.)

Приведенный выше пример позволяет высказать гипотезу, что уравнение Гамильтона-Якоби (2.9) некоторым образом **контролирует** высокочастотную асимптотику для волнового уравнения. Однако условие выполнения анзаца геометрической оптики четко не определено в приведенных выше формальных вычислениях. Чтобы исследовать поведение решения более глубоко, применим метод стационарной фазы, который определяет собой вариант метода Лапласа с заменой -1 в экспоненте на i .

10.2.2 Стационарная фаза.

ПРИМЕР 2. (стационарная фаза для волнового уравнения). Вернемся к задаче Коши

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon &= 0, \quad x \in R^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= g^\varepsilon(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

считая, что g^ε имеет быстро осциллирующую структуру

$$g^\varepsilon(x) = a(x) e^{i\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)}, \quad x \in R^n, \quad (2.11)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $a, \varphi \in C_c^\infty(R^n)$, и мы потребуем, чтобы

$$\nabla_x \varphi \neq 0, \quad x \in \text{supp } \varphi \quad (2.12)$$

Если сделать преобразование Фурье по x , получим задачу Коши для обыкновенного уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \hat{u} + \xi^2 \hat{u} &= 0, \quad x \in R^n, \quad t > 0. \\ \hat{u}|_{t=0} &= \hat{g}^\varepsilon(\xi), \quad \partial_t \hat{u}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

решение которого

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2} \hat{g}^\varepsilon(\xi) (e^{it|\xi|} + e^{-it|\xi|})$$

Следовательно

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \frac{1}{2} \hat{g}^\varepsilon(\xi) (e^{i(x \cdot y + t|\xi|)} + e^{i(x \cdot y - t|\xi|)}) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}(I_+^\varepsilon(x, t) + I_-^\varepsilon(x, t))$$

где

$$I_\pm^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \int_{R^n} \widehat{a}(z) e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_\pm(x, \xi, z, t)} dz d\xi \quad (2.14)$$

$$\varphi_\pm(x, \xi, z, t) = (x - z) \cdot y \pm t|\xi| + \varphi(z) \quad (2.15)$$

Наша цель—изучить асимптотическое поведение I_\pm^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. На основании Примера 1 мы можем рассмотреть общее интегральное выражение вида

$$I_\varepsilon = \int_{R^n} e^{i\frac{\varphi(y)}{\varepsilon}} a(y) dy \quad (2.16)$$

где a, φ гладкие функции, a — финитна и $\varepsilon > 0$. Нас интересует поведение I_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Сначала рассмотрим частный случай, когда функция φ линейна по y .

ЛЕММА 1(асимптотика линейных членов). Пусть $a \in C_c^\infty(R^n)$, $\xi \in R^n, \xi \neq 0$. тогда при $m = 1, 2, \dots$

$$\int_{R^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\xi \cdot y} a(y) dy = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_1 \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{R^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\xi \cdot y} a(y) dy &= \left(\frac{\varepsilon}{i\xi_1}\right)^m \int_{R^n} \partial_{y_1}^m (e^{\frac{i}{\varepsilon}\xi \cdot y}) a(y) dy = \\ &= \left(\frac{-\varepsilon}{i\xi_1}\right)^m \int_{R^n} e^{\frac{i}{\varepsilon}\xi \cdot y} \partial_{y_1}^m (a(y)) dy = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь предположим квадратичность φ по y .

ЛЕММА 2(асимптотика квадратичных членов). Пусть $a \in C_c^\infty(R^n)$ и A — вещественная невырожденная симметричная матрица. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}} \int_{R^n} e^{\frac{i}{2\varepsilon}y \cdot Ay} a(y) dy = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}A}}{|\det A|^{1/2}} (a(0) + O(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Здесь $\text{sgn}A$ означает сигнатуру матрицы A , т.е. число положительных собственных значений минус число отрицательных собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что для любой $\psi \in C_c^\infty(R^n)$

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{R^n} \int_{R^n} e^{ix \cdot Ax - \delta|x|^2 - ix \cdot y} \psi(y) dx dy = \\ & = \frac{\pi^{n/2}}{|\det A|^{1/2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}A} \int_{R^n} E^{-\frac{i}{4}y \cdot A^{-1}y} \varphi(y) dy \end{aligned} \quad (2.18)$$

Сначала рассмотрим диагональную матрицу A :

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_k \neq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для фиксированных $y, \lambda \in R$, и $\delta > 0$ имеем

$$\int_R e^{i\lambda x^2 - \delta x^2 - ixy} dx = \frac{1}{(\delta - i\lambda)^{1/2}} e^{\frac{iy^2}{4(i\lambda - \delta)}} \int_\Gamma e^{-z^2} dz$$

где

$$\Gamma = \left\{ z = (\delta - i\lambda)^{1/2} \left(x - \frac{iy}{2(i\lambda - \delta)} \right), \quad x \in R \right\}, \quad \Re(\delta - i\lambda)^{1/2} > 0.$$

Таким образом, Γ — это прямая в комплексной плоскости, пересекающая x -ось под углом, меньше $\pi/4$. Поэтому интеграл по Γ можно преобразовать в интеграл по вещественной оси и

$$\int_\Gamma e^{-z^2} dz = \int_R e^{-z^2} dz = \pi^{1/2}$$

Отсюда

$$\int_R e^{i\lambda x^2 - \delta x^2 - ixy} dx = \frac{\pi^{1/2}}{(\delta - i\lambda)^{1/2}} e^{\frac{iy^2}{4(i\lambda - \delta)}}$$

Поскольку матрица F имеет диагональную форму, получим

$$J_\delta(y) = \int_{R^n} e^{ix \cdot Ax - \delta|x|^2 - ix \cdot y} dx = \pi^{n/2} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(\delta - i\lambda_k)^{1/2}} e^{\frac{y^2}{4(i\lambda_k - \delta)}}$$

2) Пусть $\varphi \in C_c^\infty(R^n)$. Тогда

$$\int_{R^n} \varphi(y) J_\delta(y) dy = \pi^{n/2} \int_{R^n} \varphi(y) \prod_{k=1}^n \frac{1}{(\delta - i\lambda_k)^{1/2}} e^{\frac{y^2}{4(i\lambda_k - \delta)}} dy$$

Из слабой сходимости следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{R^n} \varphi(y) J_\delta(y) dy = \pi^{n/2} \int_{R^n} \varphi(y) \prod_{k=1}^n \frac{1}{(-i\lambda_k)^{1/2}} e^{-\frac{iy^2}{4\lambda_k}} dy \quad (2.19)$$

Из выбора ветви $\Re(\delta - i\lambda_k)^{1/2} > 0$ по непрерывности следует $\Re(-i\lambda_k)^{1/2} > 0$. Поэтому $(-i\lambda_k)^{1/2} = |\lambda_k|^{1/2} e^{-\frac{i\pi}{4}}$, если $\lambda_k > 0$. Если же $\lambda_k < 0$, то $(-i\lambda_k)^{1/2} = |\lambda_k|^{1/2} e^{\frac{i\pi}{4}}$. Следовательно,

$$\prod_{k=1}^n (-i\lambda_k)^{1/2} = |\det A|^{1/2} a^{-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} A}$$

Из (2.21) получаем (2.20) для диагональной матрицы.

3) Если матрица недиагональная, повернем систему координат так, чтобы A стала диагональной в новых координатах и опять проверим (2.20). Для этого положим $a_\varepsilon(y) = e^{\frac{i}{2\pi} y \cdot Ay}$. Для $a \in C_c^\infty(R^n)$ имеем

Для фазовой функции φ общего вида мы воспользуемся следующей леммой о замене переменных и тем самым локально сведем изучение к одному из рассмотренных выше случаев.

ЛЕММА 3(замена координат). Пусть $\varphi : R^n \rightarrow R^n$ гладкая функция:

(а) Пусть $\nabla\varphi(0) \neq 0$. Тогда существует гладкая функция $\Phi : R^n \rightarrow R^n$ такая, что

$$\Phi(0) = 0, \quad \nabla\Phi(0) = I, \quad \varphi(\Phi(x)) = \varphi(0) + \nabla\varphi(0) \cdot x, \quad |x| \ll 1 \quad (2.20)$$

(б)(лемма Морса). Пусть $\nabla\varphi(0) = 0$ и $D^2\varphi(0) \neq 0$. Тогда существует гладкая функция $\Phi : R^n \rightarrow R^n$ такая, что

$$\begin{aligned} \Phi(0) = 0, \quad \nabla\Phi(0) = I, \\ \varphi(\Phi(x)) = \varphi(0) + \frac{1}{2}x \cdot D^2\varphi(0)x, \quad |x| \ll 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Другими словами, выполнив замену переменных в окрестности $x = 0$, можно считать, что функция φ аффинная в случае (а) и квадратичная в случае (б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть $r_n = \nabla\varphi(0) \neq 0$. Тогда существуют векторы r_1, \dots, r_{n-1} такие, что $\{r_k\}_{k=1}^n$ является ортогональным базисом в R^n . Определим $\mathbf{f} : R^n \times R^n \rightarrow R^n$ по формуле

$$\mathbf{f}(x, y) = (r_1 \cdot (y - x), \dots, r_{n-1} \cdot (y - x), \varphi(y) - \varphi(0) = \nabla\varphi(0) \cdot x).$$

Тогда

$$\nabla_y \mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{pmatrix}$$

где $\{r_k\}_{k=1}^n$ рассматриваются как вектор строки. Тогда $\det D_y \mathbf{f}(0, 0) \neq 0$. По теореме о неявной функции можно найти функцию $\Phi : R^n \rightarrow R^n$ такую, что $\Phi(0) = 0$ и $\mathbf{f}(x, \Phi(x)) = 0$ при малых $|x|$. В частности

$$\begin{aligned} \varphi(\Phi(x)) &= \varphi(0) + \nabla \varphi(0) \cdot x, \\ r_k \cdot (\Phi(x) - x) &= 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Дифференцируя по x , находим $(D\Phi(0) - I)r_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, и тем самым $D\Phi(0) = I$, что доказывает утверждение (а).

2) Фиксируем $x \in R^n$. Тогда $\psi(t) = \varphi(tx)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(1) = \psi(0) + \psi'(0) + \int_0^1 (1-t)\psi''(t)dt.$$

В случае $\nabla \varphi(0) = 0$ имеем

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2}x \cdot A(x)x \quad (2.23)$$

для симметричной матрицы

$$A(x) = 2 \int_0^1 (1-t)^2 D^2 \varphi(tx) dt$$

Заметим, что $A(0) = D^2 \varphi(0)$. Здесь и далее считаем матрицу $D^2 \varphi(0)$ **невырожденной**. Тогда $A(x)$ также невырожденная при малых $|x| \ll 1$. Поэтому можно считать, при необходимости перейдя вращением к новым координатам, что матрица $A(0) = D^2 \varphi(0)$ диагональной.

3) Теперь покажем, что для каждого $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ существует отображение $\Phi_m : R^n \rightarrow R^n$ такое, что

$$\begin{aligned} \Phi_m(0) &= 0, \quad D\Phi_m(0) = I, \\ \varphi(\Phi(x)) &= \varphi(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \partial_{x_j}^2 \varphi(0) x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,j=m+1}^n \alpha_m^{kj}(x) x_j x_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

для малых $|x|$, где $A_m = (\alpha_m^{kj})$ гладкая и симметричная.

Заметим, в частности, что из (2.24) следует

$$\alpha_m^{kj}(0) = \partial_{x_k} \partial_{x_j} \varphi(0), \quad k, j = m+1, \dots, n \quad (2.25)$$

Поэтому $\alpha_m^{m+1, m+1}(x) \neq 0$ для достаточно малых $|x|$.

4) Утверждение (2.24) при $m = 0$ это (2.23), где $A_0 + a$, Φ_0 — тождественное отображение. Далее по индукции предполагаем, что (2.24) справедливо для некоторых $m \in \{0, \dots, n-1\}$ и записываем $\varphi_m(x) = \varphi(\Phi_m(x))$. Тогда

$$\varphi_m(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \partial_{x_j}^2 \varphi(0) x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, j=m+1}^n \alpha_m^{kj}(x) x_j x_k \quad (2.26)$$

для малых $|x|$.

Определим отображение $\Pi_{m+1} : R^n \rightarrow R^n$, $\Pi_m(y) = x$, по формуле

$$\Pi_{m+1}(y) = \left(y_1, \dots, y_m, \left(\frac{\alpha_m^{m+1, m+1}(y)}{\partial_{x_{m+1}}^2 \varphi(0)} \right)^{1/2} [y_{m+1} + \sum_{j=m+2}^n \frac{y_j \alpha_m^{m+1, j}(y)}{\alpha_m^{m+1, m+1}(y)}], \dots, y_n \right)$$

для малых $|y|$. Из (2.26) следует

$$\varphi_m(y) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \partial_{x_j}^2 \varphi(0) x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, j=m+1}^n \beta_{m+1}^{kj}(y) x_j x_k$$

где

$$\beta_{m+1}^{kj}(y) = \begin{cases} \alpha_m^{k, j}(y) - \frac{\alpha_m^{m+1, k}(y) \alpha_m^{m+1, j}(y)}{\alpha_m^{m+1, m+1}(y)}, & k, j = m+2, \dots, n, \\ 0 & \text{в ином случае} \end{cases}$$

Поскольку матрица $D^2 \varphi(0)$ диагональна, из (2.25) следует, что $\Pi_{m+1}(0) = 0$ и $D\Pi_{m+1}(0) = I$. Поэтому при малых $|x|$ можно определить обратное отображение $\Xi_{m+1} = \Pi_{m+1}^{-1}$, $y = \Xi_{m+1}(x)$. Следовательно

$$\varphi_m(\Xi_{m+1}(x)) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+1} \partial_{x_j}^2 \varphi(0) x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{k, j=m+2}^n \alpha_{m+1}^{kj}(x) x_j x_k$$

Положим $A_{m+1} = B_{m+1} \circ \Xi_{m+1}$, где $B_{m+1} = (\beta_{m+1}^{k, j}(y))$. Тогда это утверждение (2.26) с $m+1$ вместо m и $\Phi_{m+1} = \Phi_m \circ \Xi_{m+1}$. В случае $m = n$ получаем утверждение (б).

10.2.3 Метод стационарной фазы.

Теперь, собрав информацию из Лемм 1-3, можно дать неформальное обоснование метода стационарной фазы для вывода асимптотики интеграла

$$I_\varepsilon = \int_{R^n} e^{i\frac{\varphi(y)}{\varepsilon}} a(y) dy \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Предположим, что $\nabla\varphi = 0$ внутри носителя функции $a(y)$ в изолированных точках y_1, \dots, y_N и кроме того в этих точках матрицы $D^2\varphi(y_k)$ невырождены. Тогда для $m = 1, 2, \dots$

$$\left| \int_{R^n} e^{i\frac{\varphi(y)}{\varepsilon}} \zeta(y) a(y) dy \right| = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\zeta \in C_c^\infty$ равная нулю в окрестности точек y_1, \dots, y_N . Действительно, можно воспользоваться Леммой 3(а) для замены переменных в окрестности любой точки из носителя ζ , чтобы φ была аффинной функцией с ненулевым градиентом, а затем применить Лемму 1.

С другой стороны, если ζ гладкая, ζ равна нулю всюду, за исключением окрестности y_k , и $\zeta(y_k) = 1$, можно применить Лемму 3(б), найти

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} e^{i\frac{\varphi(y)}{\varepsilon}} \zeta(y) a(y) dy = \\ &= \int_{R^n} e^{i\frac{\varphi(\Phi(x))}{\varepsilon}} \zeta(\Phi(x)) a(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx = \\ &= e^{i\frac{\varphi(y_k)}{\varepsilon}} \int_{R^n} e^{i\frac{(x-y_k) \cdot D^2\varphi(y_k)(x-y_k)}{2\varepsilon}} \zeta(\Phi(x)) a(\Phi(x)) \times \\ & \quad \times |\det D\Phi(x)| dx = e^{i\frac{\varphi(y_k)}{\varepsilon}} \frac{(2\pi\varepsilon)^{n/2}}{|\det D^2\varphi(y_k)|^{1/2}} \times \\ & \quad \times e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(D^2\varphi(y_k))} (a(y_k) + O(\varepsilon)) \end{aligned}$$

согласно Лемме 2. Используя эти оценки и разбиение единицы, получаем асимптотическую формулу

$$I_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{n/2} \sum_{k=1}^N \frac{e^{i\frac{\varphi(y_k)}{\varepsilon}}}{|\det D^2\varphi(y_k)|^{1/2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(D^2\varphi(y_k))} (a(y_k) + O(\varepsilon)) \quad (2.27)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ПРИМЕР 4(стационарная фаза для волнового уравнения; продолжение). Теперь применим вышеизложенную теорию к одному из интегралов (2.14):

$$I_{\pm}^{\varepsilon}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \int_{R^n} \widehat{a}(z) e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi_{\pm}(x, \xi, z, t)} dz d\xi$$

Этот интеграл имеет вид (2.16), но с (x, t) вместо x и (y, z) вместо y .

Для фиксированных $x \in R^n$, $t > 0$ рассмотрим множество, на котором $(y, z) \rightarrow \varphi_+(x, y, z, t)$ стационарно:

$$S^+ = \{(y, z) \mid \nabla_{y,z}\varphi_+(x, y, z, t) = 0\}$$

В силу (2.15)(с заменой ξ на y)

$$\varphi_+(x, y, z, t) = (x - z) \cdot y + t|y| + p(z).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \partial_y \varphi_+(x, y, z, t) &= (x - z) + t \frac{y}{|y|}, \quad y \neq 0, \\ \partial_z \varphi_+(x, y, z, t) &= -y + \partial_z p(z) \end{aligned}$$

Следовательно

$$S^+ = \{(y, z) \mid x = z - \frac{t \nabla_z p(z)}{|\nabla_z p(z)|}\} \quad (2.28)$$

здесь и далее $y = \nabla_z p(z) \neq 0$, если $(y, z) \in S^+$.

Если $y \neq 0$, то

$$\begin{aligned} D_{y,z}^2 \varphi_+ &= \begin{bmatrix} D_y^2 \varphi_+ & D_{y,z}^2 \varphi_+ \\ D_{y,z}^2 \varphi_+ & D_z^2 \varphi_+ \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{t}{|y|} \mathbf{P}(y) & -I \\ -I & D_z^2 p(z) \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}(y) = I - \frac{y \otimes y}{|y|^2}$. На множестве S^+ имеем

$$y = \nabla_z p(z)$$

Поэтому

$$\det(D_{y,z}^2 \varphi_+) = (-1)^n \det \left(I - \frac{t}{|\nabla_z p|} D_z^2 p \mathbf{P}(\nabla_z p) \right)$$

Симметричная матрица $\Sigma(z) = \frac{1}{|\nabla_z p|} D_z^2 p \mathbf{P}(\nabla_z p)$ имеет n вещественных собственных значений $\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)$. Имеем $\Sigma(z) \nabla_z p = 0$, поскольку

$$\frac{\nabla_z p \otimes \nabla_z p}{|\nabla_z p|^2} = \nabla_z p.$$

Отсюда $\lambda_n(z) = 0$. Оказывается, что другие собственные значения $\lambda_1(z), \dots, \lambda_{n-1}(z)$ являются главными кривизнами $\kappa_1(z), \dots, \kappa_{n-1}(z)$ поверхности уровня p , проходящей через z . Поскольку проектор $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, ненулевые собственные значения оператора $\frac{1}{|\nabla_z p|} D_z^2 p \mathbf{P}(\nabla_z p)$ суть ненулевые главные кривизны. Пусть r_1, \dots, r_{n-1} базис главных кривизн $((\nabla_z p, r_j) = 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} (D_z^2 p \mathbf{P}(\nabla_z p) r_j, r_j) &= (\mathbf{P}^2(\nabla_z p) r_j, D_z^2 p r_j) = \\ &= \kappa_j(\mathbf{P}(\nabla_z p) r_j, \mathbf{P}(\nabla_z p) r_j) = \kappa_j \end{aligned}$$

Таким образом, на S^+

$$\det(D_{y,z}^2 \varphi_+) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n-1} (1 - t \kappa_j(z)). \quad (2.29)$$

Если $|t_0|$ достаточно мало, в силу теоремы о неявных функциях существует единственное решение уравнения

$$x_0 = z - t_0 \frac{\nabla_z p(z)}{|\nabla_z p(z)|}, \quad y = \nabla_z p(z)$$

где

$$y_0 = y(x_0, t_0), \quad z_0 = z(x_0, t_0)$$

Таким образом, из асимптотической формулы (2.27) (с $2n$ вместо n) получаем

$$I_+^\varepsilon(x_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n} \int_{R^n} \int_{R^n} a(z) e^{\frac{i}{\varepsilon} \varphi_+(x_0, y, z, t_0)} dy dz = \quad (2.30)$$

$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{\varepsilon} \operatorname{sgn}(D_{yz}^2 \varphi_+)}}{|\det D_{yz}^2 \varphi_+|^{1/2}} e^{i\varepsilon \varphi_+} [a(z_0) + O(\varepsilon)], \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.31)$$

φ_+ и $D_{yz}^2 \varphi_+$ вычислены в точке (x_0, y_0, z_0, t_0)

Напомним, что из (2.29) функция $\det(D_{yz}^2 \varphi_+)$ выражается в явном виде. Аналогична асимптотическая формула верна для $I_-^\varepsilon(x_0, t_0)$. Поскольку

$$u^\varepsilon(x_0, t_0) = \frac{1}{2} (I_+^\varepsilon(x_0, t_0) + I_-^\varepsilon(x_0, t_0))$$

можно получить подробную информацию о пределах при $\varepsilon \rightarrow 0$, по крайней мере, для малых $t_0 > 0$.

10.2.4 Оптика и стационарная фаза.

ЗАМЕЧАНИЕ. Опишем кратко взаимосвязь между методом, основанном на формальной геометрической оптике, и методом стационарной фазы. Напомним, что первый метод приводит к двум уравнениям Гамильтона-Якоби

$$\partial_t \varphi \pm |\nabla \varphi| = 0 \quad (2.32)$$

для комплексного решения $u^\varepsilon = a^\varepsilon(x, t) e^{i\frac{\varphi^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}} = (a(x, t) + o(1)) e^{i\frac{\varphi(x, t) + o(1)}{\varepsilon}}$. Характеристические уравнения для уравнения с частными производными

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi - |\nabla \varphi| &= 0 \\ \varphi|_{t=0} &= \varphi^0(x) \end{aligned} \quad (2.33)$$

(уравнения на x и p системы ОДУ Гамильтона, выведившиеся в главе 4 части 1) имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H, & x(0) = x^0, \\ \dot{p} = -\nabla_x H, & p(0) = \nabla_x \varphi^0(x^0), \end{cases} \quad (2.34)$$

Эта система называется системой ОДУ Гамильтона. В нашем случае

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{p}(s)}{|\mathbf{p}(s)|}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0$$

Пусть $x = X(x^0, t)$, $p = P(x^0, t)$ – ее решение. В силу леммы о локальной обратимости, при малых t существуют функции $x^0(x, t)$ обратные к $x = X(x^0, t)$. Далее, из уравнений системы характеристик (2.34) можно получить

$$\begin{aligned} z(x^0, t) = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n P_j(x^0, \tau) H_{p_j}(P(x^0, \tau), X(x^0, \tau)) - \right. \\ \left. - H(P(x^0, \tau), X(x^0, \tau)) \right) d\tau + \varphi^0(x^0), \end{aligned} \quad (2.35)$$

и, подставляя в (2.35) равенство $x^0 = x^0(x, t)$, получаем решение задачи Коши (2.33): $u(t, x) = z(x^0(x, t), t)$. В рассматриваемом случае, для

достаточно малого $|t| \ll 1$, характеристики замечает малую окрестность начальной точки. В частности, в данной точке $x \in R^n, t > 0$, где t мало, характеристика $\mathbf{x}(\cdot)$ -это прямая, проходящая через единственную точку z , удовлетворяющую условию

$$x_0 = x + t \frac{\nabla \varphi(x_0)}{|\nabla \varphi(x_0)|}.$$

Это условие в точности совпадает с рассмотренным выше определением стационарного множества S^+ . Аналогично характеристики уравнения с частными производными $\partial_t \varphi + |\nabla \varphi| = 0$ определяют множество S^- , на котором стационарна φ^- .

Литература:

М.В.Федорюк, „Метод перевала“, §3.1-3.3

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §4.5

Приведем литературу, хорошо дополняющую прочитанные лекции:

ЛИТЕРАТУРА:

- В.И. Арнольд* Математические методы классической механики, 4-изд. М. Эдиториал НРСС, 2000“
- А.П. Аксенов* „Дифференциальные уравнения в двух частях: Учебник и практикум для академического бакалавриата изд. Юрайт , 2016
- А.В. Боровских, А.И. Петров* „Дифференциальные уравнения в двух частях: Учебник и практикум для академического бакалавриата изд. Юрайт , 2016
- Я. С. Бугров, С. М. Никольский* „Высшая математика в 3 т. Т. 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для академического бакалавриата / . Ч 7-е изд., стер. Ч М. : Издательство Юрайт, 2016. Ч 281 с.
- В.В. Белов, Е.М. Воробьев* Задачник по уравнениям математической физики//Московский институт электронного машиностроения, Москва(1974)“
- „Конспекты лекций по математическим методам физики, “под редакцией В.В. Белова и С.Ю. Доброхотова, Институт им. Курчатова(2007)
- Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний// М. Наука(1974)“
- В.С. Владимиров* Сборник задач по уравнениям математической физики//М. Наука(1982)“
- С. К. Годунов* Уравнения математической физики//М. Наука((1971)“
- А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин,* „Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, централизованные волны разряжения(краткое учебное пособие)//МГУ им. М.В.Ломоносова, мех.-мвт. ф.-т., Москва(1997)“
- Ю.В. Егоров, М.А. Шубин* Уравнения с частными производными. Основы теории, ВИНТИ т. 30, Москва (1988)“
- А.И. Комеч* Практическое решение уравнений математической физики //Учебно-методическое пособие для студентов университетов, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва(1993)“
- Р. Курант* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964 “
- Е.М. Ландис* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов//Изд. Наука(1971)“
- А.И. Маркушевич* Теория аналитических функций , М. Наука (1968)“
- В.П. Михайлов* Дифференциальные уравнения в частных производных //Изд. Наука(1983)“
- О.А. Олейник* Лекции об уравнениях с частными производными// Москва,

БИНОМ Лаборатория знаний (2005)“
И.Г. Петровский Лекции об уравнениях с частными производными//М.
Физматгиз(1961)“
А.Д. Полянин „Уравнения и задачи математической физики в двух ча-
стях: Справочник для академического бакалавриата изд. Юрайт, 2016
С.Л. Соболев Уравнения математической физики//М. Наука(1992)“
А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики//Изд.
Наука, М(1972)“
Сборник задач по уравнениям с частными производными(под. редакц.
А.С. Шамаева), Москва, БИНОМ Лаборатория знаний (2005)“
Г.Е. Шилов Математический анализ// Изд. МГУ(1984)“
М.А. Шубин Лекции об уравнениях математической физики//МЦНМО
Москва(2001)“
М.В. Федорюк, „Метод перевала, Наука, Москва(1977)
А.Ф. Филиппов Введение в теорию дифференциальных уравнений
// УРСС(Москва), 2004“
Л. Хермандер „Анализ линейных дифференциальных операторов с част-
ными производными. Т.1: Теория распределений и анализ Фурье.“
Л.К. Эванс „Уравнения с частными производными//Новосибирск, Та-
мара Рожковская(2003)“,

Палин Владимир Владимирович, Радкевич Евгений Владимирович

Лекционный курс: Методы математической физики. Часть I.
М., Издательство попечительского совета механико–математического факультета МГУ, 120 стр.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 24.11.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 7,5 п.л.
Заказ 2 Тираж 100 экз.

Издательство попечительского совета механико–математического факультета МГУ
г. Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета