Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Факультет фундаментальной физико-химической инженерии

**УТВЕРЖДЕН**
на заседании Ученого совета
«_14_»___июня___2013 г.
протокол №_4_
Заместитель декана по учебной работе
____________ / _Григорьева Л.Д._ /
«_14_»___июня___2013 г.

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

## дисциплины «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Специальности
010701 "Физика"
020101 "Химия"

Квалификации
"Физик"
"Химик"

Форма обучения
очная

**УМК** соответствует учебному плану подготовки,
утвержденному ректором Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова академиком РАН В.А. Садовничим 23.10.2009

Москва 2013

**Название дисциплины: Методы математической физики.**

## 1. Цели и задачи освоения дисциплины:

Цели: изучить физические процессы с точки зрения математики и описать их различными уравнениями и законами, а также ознакомить студентов с теоретическими представлениями о методах, используемых в физике.

Задачи: научить студентов решать широкий класс математических задач теоретической физики, передать опыт эффективного применения математических методов в научной деятельности.

## 2. Требования к результатам освоения содержания дисциплины:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать**: основные законы и закономерности, определяющие направление и результат протекания процессов, способы аналитического представления этих закономерностей.

**Уметь**: формулировать конкретные задачи на основе законов и закономерностей, освоенных в курсе «Методы математической физики»; получать данные, проводить их математическую обработку, обобщать полученные результаты.

**Владеть**: расчетными методами решения задач, навыками поиска данных в открытых источниках (в том числе, в информационных базах данных) и применять их при решении практических задач.

**Приобрести опыт деятельности**: в анализе, формулировке и решении конкретных задач, интересующих фундаментальную науку и практику

## 3. Содержание и структура дисциплины

3.1. Содержание разделов дисциплины (К – коллоквиум, Т – проверочная самостоятельная работа (тест), РК - рубежная контрольная работа, ДЗ – домашнее задание, РГЗ – расчетно-графическое задание)

| № раздела | Наименование раздела | Содержание раздела | Форма текущего контроля |
|---|---|---|---|
| 1 | Дифференцируемость решения ОДУ по параметру и её применение. | Непрерывная зависимость решения от параметра. Дифференцируемость решения по параметру. | ДЗ, Т |
| 2 | Первые интегралы для ОДУ. | Первые интегралы и интегральные кривые. Множество первых интегралов и его свойства. Первые интегралы автономной системы ОДУ. | ДЗ, Т, РК |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | Линейные и квазилинейные УрЧП первого порядка. | Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. | ДЗ, Т, РК |
| 4. | Задача Коши для квазилинейных УрЧП. | Теорема существования и единственности решения. Алгоритмы интегрирования задачи Коши для линейного и квазилинейного УрЧП. Обобщение алгоритма А2 на случай произвольной размерности. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса. | ДЗ, РК |
| 5 | Введение в теорию нелинейных УрЧП первого порядка. | Полные интегралы и огибающие. Вывод характеристических уравнений. Задача Коши. Нехарактеристические граничные условия, локальная обратимость. Локальная теорема существования решения. Характеристики для законов сохранения. Пересекающиеся характеристики. | ДЗ, Т |
| 6 | Уравнение Гамильтона-Якоби и его классическое решение. | Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби. Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби. Вариационное исчисление. Связь с ОДУ Гамильтона. Преобразование Лежандра. Выпуклая двойственность гамильтониана и лагранжиана. Геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона-Якоби. Интегральный вариант Пуанкаре-Картана. Геометрическая оптика. | ДЗ, Т, РК |
| 7 | Коротковолновые асимптотики для УрЧП. | Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера. Коротковолновая асимптотика для волнового уравнения. | ДЗ, Т |
| 8 | Обобщённые решения для скалярного закона сохранения. | Мотивационный пример: уравнение Хопфа. Интегральное решение. Уравнение Рэнкина-Гюгонио. Отсутствие единственности для интегральных решений. Условие энтропии. Энергетические оценки. Теорема единственности для энтропийных решений. | ДЗ |
| 9 | Введение в теорию обобщённых функций (распределений). | Пробные функции и их свойства. Определение и основные свойства обобщённых функций. Дифференцирование распределений и умножение на гладкую функцию. Свёртка с гладкой функцией. Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения. | ДЗ, Т |
| 10 | Преобразование Фурье обобщённых функций и пространства Соболева. | Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Обобщенные функции умеренного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста. Пространства Соболева. | ДЗ, Т, РК |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | Канонический оператор Маслова в одномерном случае. | Модельная задача: задача Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором. Функция Грина задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором. Вычисление интегралов $I^{\pm}$. Фокальные точки. Переход через фокальные точки с помощью преобразования Фурье. Индекс Морса. Регуляризация функции Грина. Поведение лагранжева многообразия $\Lambda_t$ и его связь с индексом. Канонический оператор Маслова в одномерном случае. | Т |
| 12 | Волновое уравнение. | Модельная задача, приводящая к волновому уравнению (n = 1). Представление решения в виде суммы двух волн (n = 1). Смешанная задача для волнового уравнения, n = 1. Методы чётного и нечётного продолжения. Сферические средние. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу. Случай n = 3. Формула Кирхгофа. Волновые фронты. Случай n = 2. Метод спуска. Формула Пуассона. Неоднородная задача. Принцип Дюамеля. Конус зависимости. Единственность. | ДЗ, Т, РК |
| 13 | Уравнение Лапласа. | Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Теоремы о среднем. Свойства гармонических функций: сильный принцип максимума, единственность, гладкость. Вариационное исчисление. Случай n = 3. Электростатическая интерпретация. Случай n = 3. Функция Грина. Метод отражённых зарядов. Случай n = 2. Применение конформных отображений. Представление решения в виде суммы трёх потенциалов. Задача Неймана для уравнения Лапласа. | ДЗ, Т, РК |
| 14 | Система уравнений Максвелла. | Постановка задачи. Законы сохранения для системы уравнений Максвелла. Потенциалы. Фундаментальное решение волнового уравнения. Запаздывающий потенциал. | ДЗ, Т, РК |
| 15 | Уравнение теплопроводност и. | Фундаментальное решение. Неоднородная задача. Теоремы о стабилизации. Сильный принцип максимума в ограниченной области. Принцип максимума в полосе. | ДЗ, Т, РК |
| 16 | Введение в теорию полугрупп. | Полугруппа и её инфинитезимальный оператор. Резольвенты. Теорема Хилле-Иосиды. Приложение теории полугрупп: задача Коши для параболического уравнения. | Т |

3.2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 240 часов, из них лекции – 54 часа, семинары – 54 часа, самостоятельная работа – 132 часа.

| Вид работы | Семестр 5 | Всего |
|---|---|---|
| **Общая трудоемкость** | **240** | **240** |
| **Аудиторная работа:** | **108** | **108** |
| Лекции (Л) | 54 | 54 |
| Практические занятия (ПЗ) | 54 | 54 |
| **Самостоятельная работа** | **132** | **132** |
| **Вид итогового контроля** | Зачет, экзамен | |

Разделы дисциплины по семестрам

| № раздела | Наименование раздела | Количество часов | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Всего | Аудиторная работа | | Внеаудиторная работа |
| | | | Л | ПЗ | |
| 1 | Дифференцируемость решения ОДУ по параметру и её применение. | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 2 | Первые интегралы для ОДУ. | 6 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | Линейные и квазилинейные УрЧП первого порядка. | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 4 | Задача Коши для квазилинейных УрЧП. | 9 | 4 | 3 | 2 |
| 5 | Введение в теорию нелинейных УрЧП первого порядка. | 9 | 4 | 3 | 2 |
| 6 | Уравнение Гамильтона-Якоби и его классическое решение. | 19 | 4 | 7 | 8 |
| 7 | Коротковолновые асимптотики для УрЧП. | 32 | 2 | 4 | 26 |
| 8 | Обобщённые решения для скалярного закона сохранения. | 13 | 4 | 3 | 6 |
| 9 | Введение в теорию обобщённых функций | 13 | 4 | 5 | 4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (распределений). | | | | |
| 10 | Преобразование Фурье обобщённых функций и пространства Соболева. | 13 | 4 | 3 | 6 |
| 11 | Канонический оператор Маслова в одномерном случае. | 9 | 4 | 1 | 4 |
| 12 | Волновое уравнение. | 26 | 4 | 8 | 14 |
| 13 | Уравнение Лапласа. | 14 | 4 | 4 | 6 |
| 14 | Система уравнений Максвелла. | 33 | 4 | 3 | 26 |
| 15 | Уравнение теплопроводности. | 15 | 4 | 3 | 8 |
| 16 | Введение в теорию полугрупп. | 11 | 2 | 1 | 8 |
| | Итого | 240 | 54 | 54 | 132 |

3.3. Практические занятия (семинары)

| № раздела | № занятия | Тема | Кол-во часов |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Дифференцирование решения ОДУ по параметру | 1 |
| | 2 | Разложение решения ОДУ в ряд по параметру | 1 |
| 2 | 3 | Первые интегралы для линейной системы ОДУ | 1 |
| | 4 | Первые интегралы для нелинейной системы ОДУ | 1 |
| 3 | 5 | Общие решения линейных УрЧП первого порядка | 1 |
| | 6 | Общие решения квазилинейных УрЧП первого порядка | 1 |
| 4 | 7 | Задача Коши для линейного УрЧП первого порядка | 1 |
| | 8 | Задача Коши для квазилинейного УрЧП первого порядка | 1 |
| | 9 | Задача Коши для уравнений неразрывности и переноса | 1 |
| 5 | 10 | Задача Коши для нелинейного УрЧП первого порядка общего положения | 1 |
| | 11 | Задача Коши для закона сохранения: построение классического решения | 1 |
| | 12 | Условия нехарактеристичности и несуществование решений | 1 |
| 6 | 13 | Алгоритм интегрирования задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби. Случай парабол для уравнения с одной пространственной переменной. | 1 |
| | 14 | Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби с одной пространственной переменной: случай эллипсов. | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 | Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби с одной пространственной переменной: случай гипербол. | 1 |
| | 16 | Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби с одной пространственной переменной: гамильтониан как первый интеграл. | 1 |
| | 17 | Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби с двумя пространственными переменными: системы с факторизацией, гамильтониан как первый интеграл. | 1 |
| | 18 | Алгоритм интегрирования задачи Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби. Уравнение эйконала в случае двух переменных. | 1 |
| | 19 | Задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби в случае двух переменных. | 1 |
| 7 | 20 | Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера: задача для амплитуды | 1 |
| | 21 | Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера: задача для фазы, использование системы ОДУ Гамильтона задачи для амплитуды | 1 |
| | 22 | Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера: определение времени существования классического решения. Фокальные точки. | 1 |
| | 23 | Коротковолновая асимптотика для волнового уравнения. | 1 |
| 8 | 24 | Задача Римана для скалярного закона сохранения. | 1 |
| | 25 | Задача Коши с непрерывными начальными данными. | 1 |
| | 26 | Задача Коши с кусочно-гладкими начальными данными. | 1 |
| 9 | 27 | Сходимость в пространствах пробных и обобщенных функций. | 1 |
| | 28 | Дифференцирование обобщенных функций. Производная и первообразная для кусочно-гладкой функции. | 1 |
| | 29 | ОДУ в обобщенных функциях. | 1 |
| | 30 | Фундаментальное решение для ОДУ и метод его построения при помощи задачи Коши. | 1 |
| | 31 | Функция Грина краевой задачи на отрезке. | 1 |
| 10 | 32 | Преобразование Фурье обобщенной функции умеренного роста. | 1 |
| | 33 | Использование преобразования Фурье для поиска фундаментального решения. | 1 |
| | 34 | Пространства Соболева. | 1 |
| 11 | 35 | Вычисление индекса Маслова в простейшем случае. | 1 |
| 12 | 36 | Замена независимых переменных в линейном УрЧП второго порядка (случай двух переменных). Классификация линейных УрЧП второго порядка. | 1 |
| | 37 | Анализ формул для бегущих волн и формулы Даламбера: скорости волновых фронтов, движение особенностей начальных данных. | 1 |
| | 38 | Характеристики для одномерного уравнения струны и их связь с бегущими волнами. Метод падающей и отраженной волн. | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 39 | Методы четного и нечетного продолжения для решения смешанной задачи для полуограниченной струны. | 1 |
| | 40 | Принцип Дюамеля и его связь с преобразованием Фурье. | 1 |
| | 41 | Задача Коши для волнового уравнения в случае размерности 2: формула Пуассона и ее анализ. Принцип Гюйгенса. | 1 |
| | 42 | Задача Коши для волнового уравнения в случае размерности 3: формула Кирхгофа. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу. | 1 |
| | 43 | Метод Фурье решения смешанной задачи для волнового уравнения: общая схема метода, задача Штурма-Лиувилля. | 1 |
| 13 | 44 | Метод Фурье для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. | 1 |
| | 45 | Метод Фурье для решения краевых задач для уравнения Лапласа в кольце и круге. | 1 |
| | 46 | Применение конформных отображений для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в размерности 2. | 1 |
| | 47 | Фундаментальное решение для оператора Лапласа на плоскости. Построение функций Грина при помощи конформных отображений. | 1 |
| 14 | 48 | Уравнение неразрывности на плотность тока и задача Коши для него. | 1 |
| | 49 | Фундаментальное решение для волнового уравнения в размерности 3. Свертки. | 1 |
| | 50 | Построение асимптотик для решений задачи Коши для системы уравнений Максвелла. | 1 |
| 15 | 51 | Задача Коши для уравнения теплопроводности. | 1 |
| | 52 | Принцип максимума для уравнения теплопроводности в полосе и параболическом цилиндре. | 1 |
| | 53 | Метод Фурье решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности: случай источников тепла. | 1 |
| 16 | 54 | Резольвентные тождества. | 1 |

3.4. Самостоятельное изучение разделов дисциплин

| № раздела | № вопроса | Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение | Кол-во часов |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Периодические решения для малых периодических возмущений автономной системы | 4 |
| 2 | 2 | Первые интегралы для автономной системы ОДУ | 2 |
| 3 | 3 | Бегущие волны как решения уравнения неразрывности. Физическая интерпретация уравнений неразрывности и переноса. | 6 |
| 4 | 4 | Условия нехарактеристичности для начальной поверхности в случае произвольной размерности. | 2 |
| 5 | 5 | Полные интегралы и огибающие. | 2 |
| 6 | 6 | Геометрическая оптика и ее связь с | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | гамильтоновой механикой. | |
| | 7 | Формула Хопфа-Лакса. | 6 |
| 7 | 8 | Метод стационарной фазы. | 6 |
| | 9 | Выполнение курсовой работы по коротковолновым асимптотикам. | 20 |
| 8 | 10 | Формула Лакса-Олейник. | 6 |
| 9 | 11 | Обобщенные функции с компактным носителем. | 4 |
| 10 | 12 | Следы функций из пространств Соболева на гиперповерхностях. | 6 |
| 11 | 13 | Функция Грина задачи Коши для дифференциального оператора с частными производными: определение, простейшие свойства. | 4 |
| 12 | 14 | Теорема Коши-Ковалевской. | 6 |
| | 15 | Характеристики для уравнения с частными производными второго порядка. Общие решения гиперболических уравнений с 2 независимыми переменными. | 8 |
| 13 | 16 | Связь между аналитическими и гармоническими функциями. | 6 |
| 14 | 17 | Физические соображения, приводящие к системе уравнений Максвелла. | 6 |
| | 18 | Выполнение курсовой работы по системе уравнений Максвелла | 20 |
| 15 | 19 | Отсутствие волновых фронтов в общем случае для решений уравнения теплопроводности. Специальные решения. | 8 |
| 16 | 20 | Эллиптические операторы и оценки для них. | 8 |

## 4. Образовательные технологии

4.1. Интерактивные образовательные технологии, используемые в аудиторных занятиях

| Семестр | Вид занятия | Интерактивные образовательные технологии | Кол-во часов |
|---|---|---|---|
| 5 | Лекции, семинары | мультимедийный проектор, презентация, интерактивная доска | 108 |
| Итого | | | 108 |

## 5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

**Вариант задач для контрольных работ**

1. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = y + \mu\left(x + y^2\right), \quad y(0) = 1$$

найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

2. Найти 2-3 члена разложения решения по степеням малого параметра $\mu$.
   $xy' = \mu x^2 + \ln y, \quad y(1) = 1.$
3. Найти первые интегралы автономной системы
   $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}.$
4. Найти общее решение $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = x - 2y + z$
5. Решить задачу Коши
   $\begin{cases} u_t + xu_x = 1 \\ u\big|_{t=0} = x - 2 \end{cases}.$
6. Пузырёк газа (в начальный момент – шар радиуса 1 с плотностью $\rho_0$) движется в ламинарном воздушном потоке со скоростью $v = (1, y - z, z + y)$. Найти форму пузырька в момент времени $t = 1$.

7. Решить задачу Коши
   $\begin{cases} u_t + u_x^2 - x^2 = 0 \\ u\big|_{t=0} = 1 - x \end{cases}.$
8. Решить задачу Коши
   $\begin{cases} |\nabla u| = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{x_1 - 2x_2 = 0} = 3x_1 \end{cases}.$

9. Построить интегральное решение задачи Коши $\begin{cases} u_t + u^3 u_x = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ с тремя кривыми разрыва. Будет ли такое решение энтропийным? Ответ обосновать.
10. Построить энтропийное решение задачи Коши $\begin{cases} u_t + \left(u^2 + 2u\right)_x = 0 \\ u\big|_{t=0} = \begin{cases} 2, \, x < 0 \\ 1, \, x > 0 \end{cases} \end{cases}.$
11. Решить ОДУ в обобщённых функциях: $y'' - 5y' - 14y = \delta(x - 2) + 2\theta(x) - x$.
12. Найти фундаментальное решение ОДУ, соответствующего оператору
    $L\left(\dfrac{d}{dx}\right) = \dfrac{d^3}{dx^3} + 9\dfrac{d}{dx}.$
13. Построить функцию Грина краевой задачи
    $y'' - 4y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$
14. Найти преобразование Фурье обобщённой функции $\dfrac{\theta(x)\sin x}{x}$.
15. При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $x^\alpha \sin^\beta x$ лежит в $H^1(-1;1)$?

16. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, x > 0 \\ u\big|_{t=0} = 2x, \quad u_t\big|_{t=0} = \sin x, \\ u\big|_{x=0} = t^2 \end{cases}$$

Будет ли полученное решение классическим? Ответ обосновать.

17. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - x_1 x_2, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2 \\ u\big|_{t=0} = x_1 - x_2, \\ u_t\big|_{t=0} = e^{x_1} \sin x_1 + x_2^2 \end{cases}$$

18. Решить методом Фурье смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < \pi \\ u\big|_{t=0} = \cos\dfrac{5x}{2}, \quad u_t\big|_{t=0} = 1 - x, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

19. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{B(0,1)} u(t,x)\,dx,$ где $u(t,x)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \\ u\big|_{t=0} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

и $\operatorname{supp} \psi = \mathrm{B}(0,1), \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

20. Решить методом Фурье краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = x, \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x^2+y^2=1} = -y, \\ u\big|_{x^2+y^2=4} = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

21. Найти ограниченное решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x_2 > 0\}, \\ u\big|_{x_2=0} = \dfrac{4x_1}{1 + x_1^2} \end{cases}$$

22. Построить функцию Грина задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \\ u\big|_{x_1=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x_2=0} = 0, \\ \quad u\big|_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=1} = 0 \end{cases}$$

где $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0 \right\}$.

23. Построить функцию Грина задачи $\begin{cases} \Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \\ \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$,

где $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x_1 > 0, 0 < x_2 < \dfrac{\pi}{4} \right\}$

24. Решить методом Фурье смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < \pi \\ \quad u\big|_{t=0} = x^2 - \pi x, \\ u\big|_{x=0} = t, \quad u\big|_{x=\pi} = \sin t \end{cases}$$

25. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$, где $u(t,x)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \quad u_t = u_{xx}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u\big|_{t=0} = arctgx + 2\sin\left( x + \dfrac{1}{2} \right) \end{cases}$$

26. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^3 \\ \quad u\big|_{t=0} = x_1 x_2 - e^{x_3} \end{cases}$$

**<u>Вопросы для подготовки к зачету и экзамену:</u>**

1. Непрерывная зависимость решения от параметра.
2. Дифференцируемость решения по параметру.
3. Первые интегралы и интегральные кривые.
4. Множество первых интегралов и его свойства.
5. Первые интегралы автономной системы ОДУ.
6. Линейные уравнения в частных производных первого порядка.
7. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.
8. Теорема существования и единственности решения.
9. Алгоритмы интегрирования задачи Коши для линейного и квазилинейного УрЧП.
10. Обобщение алгоритма А2 на случай произвольной размерности.
11. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса.

12. Полные интегралы и огибающие.
13. Вывод характеристических уравнений.
14. Задача Коши. Нехарактеристические граничные условия, локальная обратимость.
15. Локальная теорема существования решения.
16. Характеристики для законов сохранения. Пересекающиеся характеристики.
17. Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби.
18. Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби.
19. Вариационное исчисление. Связь с ОДУ Гамильтона.
20. Преобразование Лежандра.
21. Выпуклая двойственность гамильтониана и лагранжиана.
22. Геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона-Якоби.
23. Интегральный вариант Пуанкаре-Картана.
24. Геометрическая оптика.
25. Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера.
26. Коротковолновая асимптотика для волнового уравнения.
27. Мотивационный пример: уравнение Хопфа. Интегральное решение.
28. Условие Рэнкина-Гюгонио. Отсутствие единственности для интегральных решений.
29. Условие энтропии. Энергетические оценки.
30. Теорема единственности для энтропийных решений.
31. Пробные функции и их свойства.
32. Определение и основные свойства обобщённых функций.
33. Дифференцирование распределений и умножение на гладкую функцию. Свёртка с гладкой функцией.
34. Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения.
35. Преобразование Фурье быстро убывающих функций.
36. Обобщенные функции умеренного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций умеренного роста.
37. Пространства Соболева.
38. Модельная задача: задача Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором.
39. Функция Грина задачи Коши для уравнения Шредингера с гармоническим осциллятором.
40. Вычисление интегралов $I^{\pm}$.
41. Фокальные точки. Переход через фокальные точки с помощью преобразования Фурье.
42. Индекс Морса.
43. Регуляризация функции Грина.
44. Поведение лагранжева многообразия $\Lambda_t$ и его связь с индексом.
45. Канонический оператор Маслова в одномерном случае.

46. Модельная задача, приводящая к волновому уравнению (n = 1).
47. Представление решения в виде суммы двух волн (n = 1).
48. Смешанная задача для волнового уравнения, n = 1. Методы чётного и нечётного продолжения.
49. Сферические средние. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.
50. Случай n = 3. Формула Кирхгофа. Волновые фронты.
51. Случай n = 2. Метод спуска. Формула Пуассона.
52. Неоднородная задача. Принцип Дюамеля.
53. Конус зависимости. Единственность.
54. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.
55. Теоремы о среднем.
56. Свойства гармонических функций: сильный принцип максимума, единственность, гладкость.
57. Вариационное исчисление.
58. Случай n = 3. Электростатическая интерпретация. Функция Грина. Метод отражённых зарядов.
59. Случай n = 2. Применение конформных отображений.
60. Представление решения в виде суммы трёх потенциалов. Задача Неймана для уравнения Лапласа.
61. Постановка задачи. Законы сохранения для системы уравнений Максвелла.
62. Потенциалы. Калибровка Лоренца.
63. Фундаментальное решение волнового уравнения. Запаздывающий потенциал
64. Фундаментальное решение для уравнения теплопроводности.
65. Неоднородная задача.
66. Теоремы о стабилизации.
67. Сильный принцип максимума в ограниченной области.
68. Принцип максимума в полосе.
69. Полугруппа и её инфинитезимальный оператор.
70. Резольвенты.
71. Теорема Хилле-Иосиды. Приложение теории полугрупп: задача Коши для параболического уравнения.

## 6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература


1. В.И. Арнольд Математические методы классической механики, 4-изд. М. Эдиториал НРСС, 2000
2. В.В. Белов, Е.М.Воробьев Задачник по уравнениям математической физики//МИЭМ, Москва(1974)

3. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний М. Наука(1974)
4. А.Ю. Горицкий, С.Н. Кружков, Г.А. Чечкин, Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, центрированные волны разряжения(краткое учебное пособие)//МГУ им. М.В.Ломоносова, мех.-мат. ф.-т., Москва(1997)
5. А.И. Комеч Практическое решение уравнений математической физики //Учебно-методическое пособие для студентов университетов, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва(1993)
6. О.А. Олейник Лекции об уравнениях с частными производными// Москва, БИНОМ Лаборатория знаний (2005)
7. С.Л. Соболев Уравнения математической физики//М. Наука(1992)
8. Сборник задач по уравнениям с частными производными(под. редакц. А.С. Шамаева), Москва, БИНОМ Лаборатория знаний (2005)
9. М.А. Шубин Лекции об уравнениях математической физики//МЦНМО Москва(2001)
10. А.Ф. Филлипов Введение в теорию дифференциальных уравнений// УРСС, 2004
11. Л. Хермандер Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1: Теория распределений и анализ Фурье.
12. Л.К. Эванс Уравнения с частными производными//Новосибирск, Тамара Рожковская(2003)

6.2. Дополнительная литература

1 Конспекты лекций по математическим методам физики, под редакцией В.В. Белова и С.Ю. Доброхотова, Институт им. Курчатова(2007)

2 В.С. Владимиров Сборник задач по уравнениям математической физики//М. Наука(1982)

3 С. К. Годунов Уравнения математической физики//М. Наука(1971)

4 Ю.В. Егоров, М.А. Шубин Уравнения с частными производными. Основы теории, ВИНИТИ т. 30, Москва (1988)

5 Р. Курант Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964

6 Е.М. Ландис Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов//Изд. Наука(1971)

7 А.И. Маркушевич Теория аналитических функций, М. Наука (1968)

8 В.П. Михайлов Дифференциальные уравнения в частных производных//Изд. Наука(1983)

9 И.Г. Петровский Лекции об уравнениях с частными производными//М. Физматгиз(1961)

10 А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики//Изд. Наука, М(1972)

11 Г.Е. Шилов Математический анализ// Изд. МГУ(1984)

12 М.В. Федорюк, Метод перевала, Наука, Москва(1977)

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные занятия проводятся в специально оборудованной аудитории с мультимедийным оборудованием. Вспомогательный материал в виде презентаций и электронных учебных материалов доступен студентам на сайте факультета.