Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Факультет фундаментальной физико-химической инженерии

УТВЕРЖДЕН
на заседании Ученого совета
«_14_»___июня___2013 г.
протокол №_4_
Заместитель декана по учебной работе
____________ / _Григорьева Л.Д._/
«_14_»___июня___2013 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

дисциплины «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Специальность
020101 "Химия"

Квалификация
"Химик"

Форма обучения
очная

УМК соответствует учебному плану подготовки,
утвержденному ректором Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова академиком РАН В.А. Садовничим 23.10.2009

Москва 2013

Название дисциплины: Математический анализ.

1. **Цели и задачи освоения дисциплины:**

   Цель: заложить знания основ естественных наук, выработать логическое структурное мышление, умение моделировать и решать фундаментальные инженерные задачи.

   Задачи: применение знаний естественных наук в своей специальности.

2. **Требования к результатам освоения содержания дисциплины:**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: основные понятия и их свойства – графики, пределы функций и последовательностей, дифференцирование и интегрирование функций, числовые и функциональные ряды, функции нескольких переменных.

Уметь: ставить и решать задачи с использованием вышеперечисленных понятий.

Владеть: теоретическими знаниями, понимать структуру курса и приемы простейших доказательств.

Приобрести опыт деятельности: самостоятельное закрепление курса, подготовка к контрольным, коллоквиумам и экзаменам.

3. **Содержание и структура дисциплины**

3.1. Содержание разделов дисциплины (К – коллоквиум, Т – проверочная самостоятельная работа (тест), РК - рубежная контрольная работа, ДЗ – домашнее задание, РГЗ – расчетно-графическое задание)

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Графики функций	Умение строить сложные графики с помощью графиков элементарных функций. Умение пользоваться декартовыми, полярными и параметрическими координатами.	ДЗ
2	Пределы функций и последовательностей	Понятие непрерывности функции в точке и на отрезке. Задачи на нахождение различных видов и последовательностей.	ДЗ, РК К
3	Дифференцируемость функций	Понятие дифференцируемости функций. Умение находить различные производные, касательные к графику в точке. Смысл дифференциалов высших порядков. Нахождение пределов с помощью правила Лопиталя и многочлена Тейлора.	ДЗ, РК
4.	Интегрирование функций	Различные виды неопределенных интегралов.	ДЗ, РК
5	Определенные интегралы	Определенные интегралы, их свойства и основные применения.	ДЗ

6	Несобственные интегралы	Несобственные интегралы. Интегралы Эллера.	ДЗ, РК
7	Числовые ряды, степенные ряды	Различные признаки сходимости числовых рядов. Разложение функции в ряд Тейлора. Нахождение радиуса сходимости степенных рядов.	ДЗ, РК
8	Функции нескольких переменных	Дифференцирование простых, сложных и неявных функций, нахождение касательной плоскости и нормали в точке для функции двух переменных. Производная по направлению, локальный экстремум функции, разложение функции в ряд Тейлора. Условный экстремум функции.	ДЗ, РК

3.2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 257 часов, из них лекции – 102 часа, семинары – 102 часа, самостоятельная работа студентов – 53 часа.

Вид работы	Семестр 1	Семестр 2	Всего
Общая трудоемкость	**131**	**126**	**257**
Аудиторная работа:	**108**	**96**	**204**
Лекции (Л)	54	48	102
Практические занятия (ПЗ)	54	48	102
Лабораторные работы (ЛР)	**0**	**0**	**0**
Самостоятельная работа	**23**	**30**	**53**
Вид итогового контроля	Зачет, экзамен	Зачет, экзамен	

Разделы дисциплины по семестрам

№ раздела	Наименование раздела	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Графики функций	18	10	8		
2	Пределы функций и последовательностей	42	22	12		8
3	Дифференцируемость функций	34	12	16		6
4	Интегрирование функций	37	10	18		9
5	Определенные интегралы	20	10	10		
6	Несобственные интегралы	22	8	6		8
7	Числовые ряды, степенные ряды	36	14	14		8
8	Функции нескольких переменных	48	16	18		14
	Итого:	257	102	102		53

3.3. Практические занятия (семинары).

№ раздела	№ занятия	Тема	Кол-во часов
1	1	Метод математической индукции, элементарные функции.	2
	2	Построение различных простейших графиков в декартовой системе координат.	2
	3	Построение сложных композиций из элементарных функций в декартовой системе координат.	2
	4	Построение графиков в полярной системе координат. Некоторые наиболее известные графики в параметрической системе координат.	2
2	5	Понятие непрерывности функции в точке. Понятие предела в точке, простейшие пределы.	2
	6	Первый замечательный предел. Таблица равносильных бесконечно малых функций.	2
	7	Второй замечательный предел.	2
	8	Пределы последовательностей.	2
	9	Повторение решения различных типов задач из 1-го и 2-го разделов, тест на дом.	2
	10	РК	2
3	11	Понятие дифференцируемости функции. Понятие приращения и дифференциала.	2
	12	Таблица производных. Уравнение касательной и нормали в точке. Геометрический и механический смысл производных.	2
	13	Производные произведения, частного, обратной, сложной функции.	2
	14	Производная неявной и параметрической функции. Логарифмическое дифференцирование.	2
	15	Правило Лопиталя.	2
	16	Нахождение пределов с помощью многочлена Тейлора.	2
	17	Повторение, тест на дом.	2
	18	РК	2
4	19	Неопределенные интегралы, таблица, замены и подстановки.	2
	20	Интегрирование по частям.	2
	21	Интегрирование дробно-рациональных функций.	2
	22	Функции, содержащие радикалы.	2
	23	Тригонометрические подстановки.	2
	24	Тригонометрические подстановки с использованием гиперболических функций.	2
	25	Решение различных задач.	2
	26	Повторение, тест на дом.	2
	27	РК	2
5	28	Нахождение определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Площадь в декартовой, параметрической и полярной системах координат.	2
	29	Длина дуги в декартовой, параметрической и полярной системах координат.	2

	30	Объем тела по сечениям, объем тел вращения.	2
	31	Площадь поверхности, масса, статические моменты дуги и пластины.	2
	32	Моменты инерции и координаты цента тяжести дуги и пластины.	2
6	33	Несобственные интегралы двух типов.	2
	34	Интегралы Эйлера. Тест на дом.	2
	35	РК	2
7	36	Числовые ряды. Понятие суммы ряда. Необходимый признак сходимости.	2
	37	Признаки сходимости знакоположительных рядов.	2
	38	Признаки сходимости знакочередующихся рядов.	2
	39	Признаки сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная сходимость.	2
	40	Разложение функции в ряд Тейлора.	2
	41	Область сходимости степенных рядов. Тест на дом.	2
	42	РК	2
8	43	Понятия дифференцируемости и непрерывности для функции нескольких переменных. Частные производные.	2
	44	Дифференциалы функции нескольких переменных, их геометрический смысл. Формула Тейлора.	2
	45	Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.	2
	46	Частные производные для сложных и неявных функций.	2
	47	Производная по направлению. Градиент.	2
	48	Локальный экстремум функции нескольких переменных.	2
	49	Условный экстремум функции нескольких переменных.	2
	50	Повторение, тест на дом.	2
	51	РК	2

3.4. Самостоятельное изучение разделов дисциплин

№ раздела	№ вопроса	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов
2	1 2	Подготовить РК № 1. Подготовить коллоквиум.	4 4
3	3	Подготовить РК № 2	6
4	4 5	Подготовить РК № 3 Подготовиться к экзамену.	6 3
6	7	Подготовить РК № 4.	8
7	8	Подготовить РК № 5.	8
8	9 10	Подготовить РК № 6. Подготовиться к экзамену.	8 6

4. Образовательные технологии

Интерактивные образовательные технологии, используемые в аудиторных занятиях

Семестр	Вид занятия	Интерактивные образовательные технологии	Кол-во часов
1-2	Лекции, семинары	мультимедийный проектор, презентация, интерактивная доска	204
Итого			204

5. **Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации:**

Вопросы коллоквиумов:

1. Аксиома непрерывности. Принцип Архимеда.
2. Свойство плотности множества рациональных чисел.
3. Определение иррациональных чисел, доказательство их существования, свойство плотности множества иррациональных чисел.
4. Теорема о верхних гранях. Критерий точной верхней грани.
5. Теорема о нижних гранях. Критерий точной нижней грани. Связь верхних и нижних граней.
6. Понятие непрерывности функции в точке. Доказательство неравенства $|\sin(x)|<=|x|$. Доказательство непрерывности $\sin(x)$, $\cos(x)$, $y=kx+b$.
7. Понятие предела функции в точке. Связь предела и непрерывности.
8. Свойства предела функции: единственность, сохранение неравенства, ограниченность функции в проколотой окрестности.
9. Теорема о перестановочности знаков предела и непрерывной функции. Следствие о непрерывности сложной функции.
10. Определение бесконечно малой функции. Определение предела функции через бесконечно малые. Доказательство эквивалентности двух определений предела. Свойства бесконечно малых (5 свойств). Доказательство двух по выбору преподавателя.
11. Теорема о пределе суммы, разности, произведения, частного функций. Следствие о непрерывности. Теорема о непрерывности показательной, степенной, логарифмической и обратных тригонометрических функций (б/д).
12. Переход к пределу в неравенствах. Оценочный признак предела.
13. Первый замечательный предел. Теорема о замене переменной.
14. Определение бесконечно большой функции , определение предела при X стремящемся к бесконечности. Определение равносильных бесконечно малых функций. Порядок малости. Таблица эквивалентных (б/д). Теорема о замене на эквивалентные в пределе произведения и частного.
15. Односторонние пределы, понятие непрерывности слева и справа. Теорема (критерий существования предела) о связи с односторонними пределами. Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций. Классификация точек разрыва.
16. Определение функции, непрерывной на отрезке, определение равномерной непрерывности. Теорема Кантора (б/д). Свойства непрерывных на отрезке функции (непрерывность суммы, разности, произведения и частного, а также ограниченность функции).
17. Продолжение свойств непрерывных на отрезке функций. Теорема о достижимости минимального и максимального значения, теорема о нулевом значении при разных знаках в начале и конце отрезка, теорема о образе отрезка, следствие о достижимости всех значений между минимальным и максимальным.
18. Определение числовой последовательности. Определение ее предела. Основные свойства предела (единственность, сохранение неравенства, ограниченность последовательности).

19. Определение бесконечно малых последовательностей. Свойства бесконечно малых последовательностей. Теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного для произвольных последовательностей.
20. Предел монотонной последовательности. Две теоремы Вейрштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности.
21. Число «е». Определение через последовательность и доказательство существования.

Вопросы к экзамену в 1 семестре:

1. . Определение производной в точке. Связь дифференцируемости и существования производной для функции одного переменного.
2. Производные x*x, sin(x), ln(x), |x|, геометрический и механический смысл производной. Связь между существованием производной и непрерывностью в точке.
3. Правила вычисления производных. Производные cos(x), tg(x), arctg(x), arcsin(x). Понятие производных высших порядков.
4. Формула Лейбница (б/д). Формула Тейлора для алгебраического многочлена. Функция, дифференцируемая в точке. Связь дифференцируемости и непрерывности.
5. Бином Ньютона.
6. Понятие экстремума. Теорема Ферма. Следствия о касательной в точке экстремума, о законах преломления света от ровной поверхности, общий случай преломления света (б/д). Свойства параболы (б/д).
7. Теорема Лагранжа о среднем значении, следствия, формула конечных разностей.
8. Теорема Коши о среднем значении.
9. Следствие теоремы Коши: правило Лопиталя-Бернулли для неопределенности типа 0/0. Замечания для других неопределенностей.
10. Критерий постоянства функции.
11. Критерий монотонности функции на промежутке. Достаточный признак строгой монотонности функции на промежутке.
12. Достаточное условие экстремума функции по знаку ее первой производной.
13. Достаточное условие экстремума функции по знаку ее второй производной.
14. Достаточный признак выпуклости, свойство выпуклых функций (б/д).
15. Неравенство Йенсена. Следствия (неравенство Гёльдера, неравенство Коши-Буняковского, неравенство Минковского) (б/д).
16. Понятие дифференциала числовой функции, геометрический и механический смысл дифференциала, дифференциал суммы, произведения и частного, дифференциалы высшего порядка, инвариантность первого дифференциала.
17. Понятие первообразной, связь областей определений функции и первообразной, первообразная функция на промежутке. Понятие неопределенного интеграла.
18. Линейные операции на неопределенных интегралах.
19. Свойства и правила вычисления неопределенных интегралов.

Вопросы к экзамену во 2 семестре:

1. Определённый интеграл: определение, необходимое условие существования, достаточное условие существования, геометрический смысл.

2. Формула Ньютона-Лейбница. Простейшие свойства определённого интеграла: линейность, аддитивность. Правила вычисления определённого интеграла (в том числе интегрирование заменой и по частям).

3.Теорема об интеграле с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Теоремы о среднем , о интегрирование неравенств, об оценке, о модулях. Общая теорема о среднем значении (б/д).

4.Приложения определённого интеграла. Задачи о пройденном пути, о работе переменной силы, о замкнутой площади, о длине дуги, об объёмах тел вращения (рассмотреть уравнения границ в разных системах координат).

5.Несобственные интегралы: определение, свойства, аналогичные свойствам определённых интегралов.

6. Несобственные интегралы от положительных функций: критерий сходимости, признак сравнения, оценка модуля. Сходимость интеграла Эйлера-Пуассона.

7. Действия над несобственными интегралами: интегрирование подстановкой и по частям. Абсолютная и условная сходимость. Интегралы Дирихле и Френеля.

8. Свойства гамма- и бета-функций. Формула Эйлера для натуральных параметров. Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона.

9. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Необходимый признак сходящегося ряда. Критерий сходимости ряда в терминах его остатков и следствия.

10. Формула суммирования. Гармонический ряд. Эталонный ряд. Интегральный признак сходимости ряда.

11. Положительные ряды: критерии сходимости, признаки сравнения, признаки Даламбера и Каши. Знакочередующиеся ряды, признак Бернулли-Лейбница.

12. Критерий Коши сходимости числового ряда. Абсолютная сходимость ряда; признаки Даламбера и Коши. Действия над абсолютно сходящимися рядами: линейные свойства; сочетательный и переместительный законы. Условно сходящиеся ряды; теорема Римана (б/д).

13. Локальная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Локальные формулы Тейлора элементарных функций. Свойства символов O и o.

14. Формула Тейлора с остаточными членами в интегральной форме и в форме Лагранжа. Ряд Тейлора; достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

15. Векторные пространства R^m, m>=1. Стандартное скалярное произведение, неравенство Коши-Буняковского. Стандартная метрика, норма, углы в R^m. Метрические пространства; открытые шары, дельта-окрестности, свойства окрестностей.

16. Свойства открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве. Непрерывные отображения метрических пространств; частные случаи. Критерий непрерывного отображения из R^m в R^n.

17. Частные производные действительной функции нескольких действительных переменных; отношение к непрерывности. Производные по направлениям. Градиент; основные свойства.

18. Три вида записи свойства дифференцируемости функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Теорема о частных производных сложных функций (б/д). Дифференциал; инвариантная форма и правила вычисления.

19. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца о смешанных производных. Функции классов C^n. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

20. Теорема Ферма, необходимое условие экстремума функции нескольких переменных. Достаточное условие экстремума.

21. Теорема Юнга о существовании неявной функции, задаваемой одним уравнением. Производные и дифференциалы неявной функции.

22. Условный экстремум функции нескольких переменных. Множители и функция Лагранжа.

23. Равномерная непрерывность линейных отображений из R^m в R^n. Дифференцируемые отображения из R^m в R^n. Матрица Якоби. Критерий дифференцируемости отображения из R^m в R^n.

24. Теорема Юнга о существовании и дифференцируемости неявного отображения (б/д). свойства дифференцируемых отображений с ненулевыми якобианами; теорема о локальном диффеоморфизме; принцип сохранения области.

Образцы контрольных работ:

№ 1

В первых четырёх задачах надо построить графики функций:

1. Y=arcsin|6-3x|+π/2
2. Y=e^{-x} sinx
3. Y=$||2^x$ -1|-1|
4. Y=$\log_2(\frac{(x+1)x}{3-x})$
5. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+3x+1)}-\sqrt{(x^2-3x-4)})$
6. $\lim_{x\to 0}((\frac{3x+1}{x+1})^{\frac{2}{sinx}})$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{tg(2x)-\sin(2x)}{\sqrt[3]{1+x^3}-1+x^4}$
8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(sin2x)^{\frac{1}{(\arcsin(x-\frac{\pi}{4}))^2}}$

№2

В первых четырёх задачах надо найти производную функции y(x) на области опр.

1. Y=$\frac{10^{(x+5)}*arctg\,x^2}{\sec(x+1)+2^x}$
2. Y=$[shx+thx]^{x^2+x}$
3. Cos(x)*sin(y^2)+$(lny)^x$-$(tgy)^y$=2
4. $\begin{cases} x=(cost)^t+sint \\ \quad y=e^t+2^{sint} \end{cases}$
5. $y=x^2$-2x+1 В точке M(x=5) записать уравнения касательной и нормали к кривой. Найти расстояние от нормали до начала координат.
6. С помощью правила Лопиталя найти $\lim_{x\to 0}(tgx*lnx)$
7. С помощью разложений элементарных функций по формуле Тейлора найти $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(cosx)}$

№3

1. $\int 2^{(sinx)^2} * \sin(2x)dx$
2. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$
3. $\int \frac{2x-1}{x^4+x^2}dx$
4. $\int (2x+4) * \sqrt{x^2+4x}\,dx$
5. $\int sin2x * sin5x * sin8xdx$
6. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

№**4**

1. Найти площадь , ограниченную линиями $\begin{cases} y = \ln(-x) \\ x+1+3y=0 \\ y = 1\,, y \le 1 \end{cases}$
2. Найти длину дуги , заданной на отрезке t∈ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $\begin{cases} x = \sqrt{2} * (sint)^3 \\ y = 2(cost)^3 \\ z = \sqrt{2} * (sint)^3 \end{cases}$
3. Найти объём тела полученного при вращении фигуры вокруг оси OX $\begin{cases} (y-3)^2 + 3x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$
4. Найти массу дуги $\begin{cases} x = 2(sint)^3 \\ y = 2(cost)^3 \end{cases}$ $x \ge 0, y \ge 0$ при условиях $\begin{cases} \rho(x,y) = 8x^2 \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$
5. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x*(lnx)^3}$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^6 * (cosx)^{10}dx$

№5

1. Проверить на сходимость $\int_0^3 \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{1}{6}}}$
2. Проверить на сходимость $\int_2^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi x}{4})}{x}dx$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!n!}{(3n-1)!}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3-n+5}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n-6}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n*(\ln(n+2))^3}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * lnx}{n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{\sqrt[3]{n}}$
9. Разложить функцию в ряд Маклорена y=ln(4-x^2)
10. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n*(\ln(n+3))^3}$

№6

1. Найти первый и второй дифференциалы функции $z = x^2(x+y) + y^3$sin(2x)
2. Найти для функции z(x,y) $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ если $z = tg\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - cosy$ и $\begin{cases} x = u - 2v \\ y = \frac{u}{v} \end{cases}$
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $xy^3 - \sqrt{zxy} + \cos(x^2 - y^2) = 0$
4. Найти уравнение касаательной плоскости и нормальной прямой в точке M(0,1,1) для функции $5z^2 - xy + \sin(xyz) - 5 = 0$
5. U(x,y,z)=$x^2y - \frac{z}{x+y} + zy^2$. Из точки м(2.3,0) выходит вектор $\bar{l}$(1,1,1). Найти $\frac{\partial U}{\partial l}$.
6. Найти экстремум $z = e^{x/2}(x+y^2)$.

7. Найти экстремум $u=xyz$ при условии $xy+xz+yz=8$.

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература: Гаврилов В.И., Макаров Ю.Н., Чирский В.Г. “Математический анализ” университетский учебник. 2013.

6.2. Дополнительная литература: Власов В.В., Митрохин С.И. , Прошкина А.В., Родионов Т.В. , Трушина О.В .”Задачи и упражнения по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.” Москва,2009 или 2010.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Лекционные занятия проводятся в специально оборудованной аудитории с мультимедийным оборудованием. Вспомогательный материал в виде презентаций и электронных учебных материалов доступен студентам на сайте факультета.