Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
Факультет фундаментальной физико-химической инженерии

УТВЕРЖДЕН
на заседании Ученого совета
«_14_»___июня___2013 г.
протокол №_4_
Заместитель декана по учебной работе
____________ / _Григорьева Л.Д._/
«_14_»___июня___2013 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

дисциплины «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Специальности
010701 "Физика"
020101 "Химия"

Квалификации
"Физик"
"Химик"

Форма обучения
очная

УМК соответствует учебному плану подготовки,
утвержденному ректором Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова академиком РАН В.А. Садовничим 23.10.2009

Москва 2013

Название дисциплины: Линейная алгебра

1. **Цели и задачи освоения дисциплины:**

Цель: изучение основных математических понятий, представлений и их свойств, на основе которых создаются математические модели физических явлений и законов в линейном приближении. Знания, полученные при изучении курса «Линейной алгебры», с одной стороны, формируют математическую культуру, с другой, составляют основу естественнонаучного подхода исследования природных явлений.

Задачи:

изучение и овладение методами решения математических задач, формулируемых и решаемых в линейной алгебре;

изучение методов и приемов математических доказательств теорем и утверждений;

формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний при исследовании и построении математических моделей;

овладение студентами знаний по применению линейной алгебры в различных разделах физики при экспериментальном и теоретическом исследовании физических явлений.

2. **Требования к результатам освоения содержания дисциплины:**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: понятия, представления и утверждения алгебры, доказательства основных теорем линейной алгебры, основные методы вычислений и методы решения алгебраических задач.

Уметь: применять методы линейной алгебры в различных областях физики для построения физических и математических моделей, описывающих различные закономерности и явления.

Владеть: практическими навыками и приемами вычислений определителей матриц, операций над матрицами, решения систем линейных алгебраических уравнений, законов преобразований векторов и матриц, решения характеристического уравнения, нахождения собственных векторов и собственных значений, операций над квадратичными формами, вычисления функций от матриц и т.д.

Приобрести опыт деятельности: в анализе, формулировке и решении конкретных задач, интересующих фундаментальную науку и практику

3. **Содержание и структура дисциплины**

3.1. Содержание разделов дисциплины (К – коллоквиум, Т – проверочная самостоятельная работа (тест), РК - рубежная контрольная работа, ДЗ – домашнее задание, РГЗ – расчетно-графическое задание)

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля

1	**Линейные пространства и их подпространства.**	Комплексные числа и действия с ними. Определение линейного пространства, простейшие следствия из аксиом. Примеры линейных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов в линейном пространстве. Основная лемма о линейной зависимости. Следствия. Примеры линейно зависимых и линейно независимых систем векторов. Понятие полной системы и базиса. Размерность конечномерного линейного пространства. Теорема о базисе. Примеры базисов. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, единственность координат. Матрица перехода между двумя базисами линейного пространства. Связь координат вектора в различных базисах Понятие подпространства линейного пространства, примеры подпространств. Размерность подпространства. Теоремы о пересечении и объединении подпространств. Линейная оболочка и её свойства. Сумма подпространств. Формула для размерности суммы подпространств. Прямая сумма подпространств, примеры. Теорема о прямой сумме.	ДЗ , КР
2	**Линейные функционалы и линейные операторы.**	Линейные отображения. Примеры, задание линейного отображения образами базисных векторов. Ядро и образ линейного отображения, связь их размерностей с размерностью пространства. Мономорфизм, эпиморфизм и изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Теорема об изоморфизме для пространств одинаковой размерности. Пространство линейных функционалов как сопряжённое линейное пространство. Сопряжённый базис и размерность сопряженного пространства. Второе сопряжённое пространство. Естественный изоморфизм между линейным пространством и его вторым сопряжённым. Линейный оператор, определение и примеры. Матрица линейного оператора в базисе, вычисление с её помощью координат образа вектора. Невырожденный оператор и невырожденность его матрицы. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису. Подобные матрицы. Действия с линейными операторами. Инвариантные подпространства. Примеры инвариантных подпространств. Строение матрицы оператора с инвариантным подпространством в специальном базисе. Приводимый оператор, строение его мат-	ДЗ , КР

		рицы в специальном базисе. Понятие прямой суммы операторов.	
3		Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Примеры. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Инвариантность собственного подпространства. Критерий диаганализируемости матрицы линейного оператора. Характеристический многочлен оператора, отыскание собственных значений оператора как корней его характеристического многочлена. Алгебраическая и геометрическая кратности корня. Критерий диаганализируемости в терминах корней характеристического многочлена. Нильпотентный оператор, его свойства. Наличие одномерного или двумерного инвариантного подпространства у всякого оператора в вещественном пространстве. Пример нильпотентного оператора. Понятие Жордановой нормальной формы и Жорданова базиса. Теорема о Жордановой нормальной форме (без доказательства). Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства).	ДЗ , КР
4.	**Линейные функционалы и линейные операторы.**	Билинейные формы. Примеры билинейных форм. Матрица билинейной формы в базисе, закон её преобразования при переходе к новому базису. Квадратичная форма и её матрица в базисе. Связь квадратичных и билинейных форм (Полярная билинейная форма). Связь матриц квадратичной формы в различных базисах. Приведение матрицы квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид квадратичной формы. Индексы инерции, закон инерции. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определённости. Определитель Грамма, её свойства. Неравенство Коши-Буняковского. Эвклидовы и нормированные пространства. Определение и примеры. Длины векторов и углы между ними. Ортогональные и ортонормированные системы векторов, их свойства. Ортогональные (ортонормированные) базисы. Ортогональ-	ДЗ , КР

		ные матрицы, ортогональность матрицы перехода между ортонормированными базисами. Ортогональное дополнение к множеству в Эвклидовом пространстве. Общий вид линейного функционала в Эвклидовом пространстве. Линейные отображения и изоморфизмы Эвклидовых пространств. Теоремы об изоморфизме и об изоморфности. Сопряжённый оператор и его свойства. Самосопряжённый оператор, его свойства, строение матрицы самосопряжённого оператора в специальном базисе. Изометрический оператор, теорема о его свойствах. Теоремы о свойствах инвариантных подпространств, собственных значениях и каноническом виде матрицы изометрического оператора. Неотрицательный оператор и корень из него. Теорема о представлении оператора в Эвклидовом пространстве в виде композиции неотрицательного и изометрического операторов. Квадратичные формы в Эвклидовом пространстве. Приведение квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием. Теорема об одновременном приведении пары форм, одна из которых положительно определена.	

3.2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 80 часов, из них лекции– 32 часа, семинары – 16 часов, самостоятельная работа студентов для подготовки – 32 часа.

Вид работы	Семестр 2	Всего
Общая трудоемкость	**80**	**80**
Аудиторная работа:	**48**	**48**
Лекции (Л)	32	32
Практические занятия (ПЗ)	16	16
Самостоятельная работа	**32**	**32**
Вид итогового контроля	Зачет, экзамен	

Разделы дисциплины по семестрам

№ раздела	Наименование раздела	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Внеаудиторная работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Комлексные числа и действия с ними.	7	2	1		4
2	Примеры линейных пространств, базисы, координаты, матрицы	3	2	1		

	перехода.					
3	Подпространства, операции с подпространствами. Задание подпространств с помощью линейных оболочек и решений ОСЛАУ.	5	4	1		
4	Линейные функционалы и линейные отображения. Ядро и образ.	4	2	2		
5	Линейные операторы, ядро и образ, матрица линейного оператора в различных базисах.	3	2	1		
6	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.	5	4	1		
7	Критерии диагонализируемости матрицы линейного оператора. Жорданова нормальная форма.	15	4	3		8
8	Билиненйные и квадратичные формы. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду.	6	4	2		
9	Евклидовы векторные пространства. Ортогональные базисы. Геометрия евклидовых пространств.	25	4	1		20
10	Специальные классы операторов: изометрические и самосопряженные операторы. Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям в Евклидовом пространстве.	7	4	3		

3.3. Практические занятия (семинары)

№ раздела	№ занятия	Тема	Кол-во часов
1	1	Комплексные числа и действия с ними.	1
2	2	Примеры линейных пространств, базисы, координаты. Матрицы перехода, вычисление координат векторов в новом базисе.	1
3	3	Подпространства, операции с подпространствами. Задание подпространств с помощью линейных оболочек и решений ОСЛАУ.	1
4	4	Линейные функционалы и линейные отображения. Задание линейных функционалов и отображений на базисе. Матрица линейного отображения.	1
	5	Ядро и образ линейного отображения, связь между их размерностями.	1
5	6	Линейные операторы, ядро и образ. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.	1
6	7	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.	1
7	8	Диагонализируемые операторы, вычисление ЖНФ оператора.	1
	9	Контрольная работа по первой части курса.	2
8	10	Матрица билинейной и квадратичной формы в базисе, ее изменение при переходе к новому базису.	1
	11	Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.	1
9	12	Геометрия Евклидова пространства, проекции и ортогональные дополнения. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.	1
10	13	Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Матрица сопряженного оператора. Приведение к каноническому виду матрицы изометрического и ортогонального операторов. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в Евклидовом пространстве.	1
	14	Контрольная работа по второй части курса.	2

3.4. Самостоятельное изучение разделов дисциплин

№ раздела	№ вопроса	Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение	Кол-во часов
1	1	Задание геометрических объектов с помощью операций с комплексными числами.	4
7	2	Построение Жорданова базиса.	8
9	3	Эрмитовы векторные пространства и эрмитовы операторы.	12

	4	Квадрики и коники	8

4. Образовательные технологии

4.1. Интерактивные образовательные технологии, используемые в аудиторных занятиях

Семестр	Вид занятия	Интерактивные образовательные технологии	Кол-во часов
2	Лекции, семинары	мультимедийный проектор, презентация, интерактивная доска	48
Итого			48

5. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Варианты контрольных работ

1 контрольная

1. Найти все различные значения выражения

$$\sqrt[4]{\frac{3i+1}{2-2i}}$$

2. Доказать, что каждая из систем векторов образует базис и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму

$(2,1,0); (3,1,1); (2,0,5)$

$(7,2,3); (2,3,-7); (4,2,-3)$

3. Найти базис суммы и пересечения подпространств

$$\begin{cases} 16x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0, \\ 24x_1 - 15x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

и

$\langle (1,2,1); (1,1,-1); (1,3,3) \rangle$

4. Матрица оператора имеет в базисе $\{a_1, a_2, a_3\}$ вид

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Найти его матрицу в базисе $\{b_1, b_2, b_3\}$, если матрица перехода от базиса $\{a_1, a_2, a_3\}$ к $\{b_1, b_2, b_3\}$ имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

2 контрольная

1. Найти проекцию вектора x на подпространство $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и его ортогональную составляющую.

$x = (2,-9,14,11), a_1 = (1,-2,-5,-4), a_2 = (5,8,-1,-2), a_3 = (1,4,3,2)$

2. При каких a квадратичная форма положительно определена?

$ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$

3. Написать канонический вид квадратичной формы и приводящее к нему линейное преобразование.

$2x_1^2 + 26x_2^2 + 13x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

4. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к главным осям и написать канонический вид.
$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

Вопросы для подготовки к экзамену (семестр 2):

1. Комплексные числа и действия с ними.
2. Определение линейного пространства, простейшие следствия из аксиом. Примеры линейных пространств.
3. Линейная зависимость и линейная независимость систем векторов в линейном пространстве. Основная лемма о линейной зависимости. Следствия. Примеры линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.
4. Понятие полной системы и базиса. Размерность конечномерного линейного пространства. Теорема о базисе. Примеры базисов. Теорема о дополнении линейно независимой системы векторов до базиса.
5. Координаты вектора в базисе, единственность координат. Матрица перехода между двумя базисами линейного пространства. Связь координат вектора в различных базисах
6. Понятие подпространства линейного пространства, примеры подпространств. Размерность подпространства. Теоремы о пересечении и объединении подпространств. Линейная оболочка и её свойства. Сумма подпространств.
7. Формула для размерности суммы подпространств. Прямая сумма подпространств, примеры. Теорема о прямой сумме.
8. Линейные отображения. Примеры, задание линейного отображения образами базисных векторов. Ядро и образ линейного отображения, связь их размерностей с размерностью пространства. Мономорфизм, эпиморфизм и изоморфизм линейных пространств. Изоморфность линейных пространств одинаковой размерности. Теорема об изоморфизме для пространств одинаковой размерности.
9. Пространство линейных функционалов как сопряжённое линейное пространство. Сопряжённый базис и размерность сопряженного пространства. Второе сопряжённое пространство. Естественный изоморфизм между линейным пространством и его вторым сопряжённым.
10. Линейный оператор, определение и примеры. Матрица линейного оператора в базисе, вычисление с её помощью координат образа вектора. Невырожденный оператор и невырожденность его матрицы. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису. Подобные матрицы. Действия с линейными операторами.
11. Инвариантные подпространства. Примеры инвариантных подпространств. Строение матрицы оператора с инвариантным подпространством в специальном базисе. Приводимый оператор, строение его матрицы в специальном базисе. Понятие прямой суммы операторов.
12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Примеры. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Инвариантность собственного подпространства. Критерий диаганализируемости матрицы линейного оператора.
13. Характеристический многочлен оператора, отыскание собственных значений оператора как корней его характеристического многочлена. Алгебраическая и геометрическая кратности корня. Критерий диаганализируемости в терминах корней характеристического многочлена.
14. Нильпотентный оператор, его свойства. Пример нильпотентного оператора. Понятие Жордановой нормальной формы и Жорданова базиса. Теорема о Жордановой нормальной форме (без доказательства). Теорема Гамильтона-Кэли (без доказательства).

15. Билинейные формы. Примеры билинейных форм. Матрица билинейной формы в базисе, закон её преобразования при переходе к новому базису. Квадратичная форма и её матрица в базисе. Связь квадратичных и билинейных форм (полярная билинейная форма). Связь матриц квадратичной формы в различных базисах.
16. Приведение матрицы квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид квадратичной формы. Индексы инерции, закон инерции.
17. Теорема Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
18. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определённости. Определитель Грамма, его свойства. Неравенство Коши-Буняковского.
19. Эвклидовы и нормированные пространства. Определение и примеры. Длины векторов и углы между ними. Ортогональные и ортонормированные системы векторов, их свойства. Ортогональные (ортонормированные) базисы. Ортогональные матрицы, ортогональность матрицы перехода между ортонормированными базисами. Ортогональное дополнение к множеству в Эвклидовом пространстве. Общий вид линейного функционала в Эвклидовом пространстве.
20. Линейные отображения и изоморфизмы Эвклидовых пространств. Теоремы об изоморфизме и об изоморфности. Сопряжённый оператор и его свойства. Самосопряжённый оператор, его свойства, строение матрицы самосопряжённого оператора в специальном базисе.
21. Изометрический оператор, теорема о его свойствах. Теоремы о свойствах инвариантных подпространств, собственных значениях и каноническом виде матрицы изометрического оператора.
22. Неотрицательный оператор и корень из него. Теорема о представлении оператора в Эвклидовом пространстве в виде композиции неотрицательного и изометрического операторов.
23. Квадратичные формы в Эвклидовом пространстве. Приведение квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием. Теорема об одновременном приведении пары форм, одна из которых положительно определена.

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература

1. Александров П.С. - Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1968.
2. Гельфанд И. М. - Лекции по линейной алгебре. - М.: Наука, 1999.
3. Ильин В.А., Ким Г.Б. - Линейная алгебра. - М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. - Линейная алгебра. - М.: Наука, 1984.
5. Проскуряков И.В. - Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1966.

6.2. Дополнительная литература

1. Гантмахер Ф.Р.-Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
2. Кострикин А.И. Линейная алгебра. – М. Изд-во Физико-математическая литература, 2000.
3. Федорчук В.В.- Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Изд-во МГУ, 1990.
4. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. - М. Изд-во Физико-математическая литература, 2009
5. Шилов Г.Е. - Введение в теорию линейных пространств. - М.: Техиздат, 1956 (и последующие издания).

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные занятия проводятся в специально оборудованной аудитории с мультимедийным оборудованием. Вспомогательный материал в виде презентаций и электронных учебных материалов доступен студентам на сайте факультета.